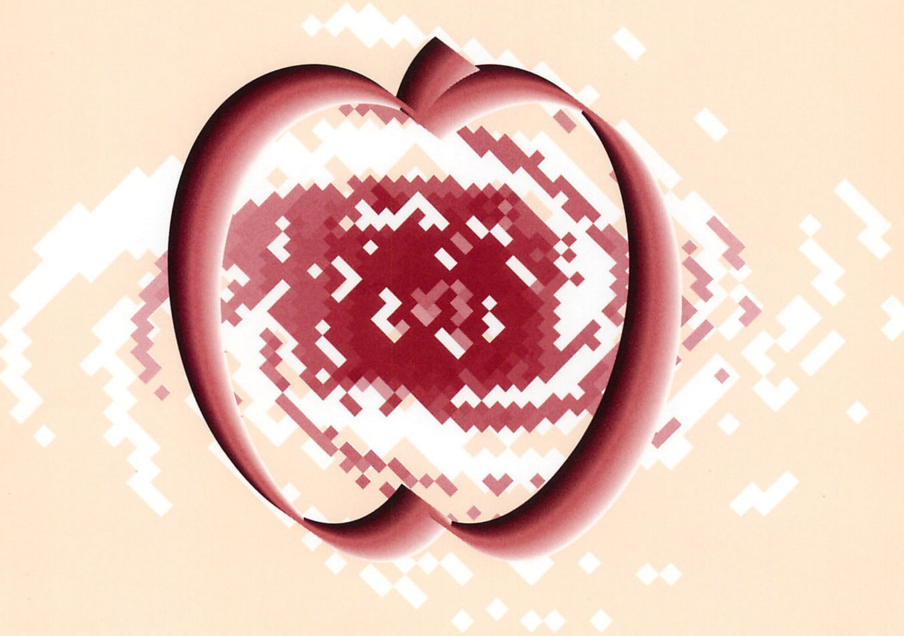
裳華房テキストシリーズ - 物理学

阿部龍蔵・川村 清 監修

素粒子物理学

原　康夫 著



裳 華 房

阿部龍蔵・川村 清 監修

裳華房テキストシリーズ－物理学

素粒子物理学

筑波大学名誉教授
理学博士
原 康夫 著

裳 華 房

Elementary Particle Physics

by

Yasuo Hara, Dr. Sc.

SHOKABO

TOKYO

編 集 趣 旨

「裳華房テキストシリーズ - 物理学」の刊行にあたり，編集委員としてその編集趣旨について概観しておこう．ここ数年来，大学の設置基準の大綱化にともなって，教養部解体による基礎教育の見直しや大学教育全体の再構築が行われ，大学の授業も半期制をとるところが増えてきた．このような事態と直接関係はないかも知れないが，選択科目の自由化により，学生にとってむずかしい内容の物理学はとかく嫌われる傾向にある．特に，高等学校の物理ではこの傾向が強く，物理を十分履修しなかった学生が大学に入学した際の物理教育は各大学における重大な課題となっている．

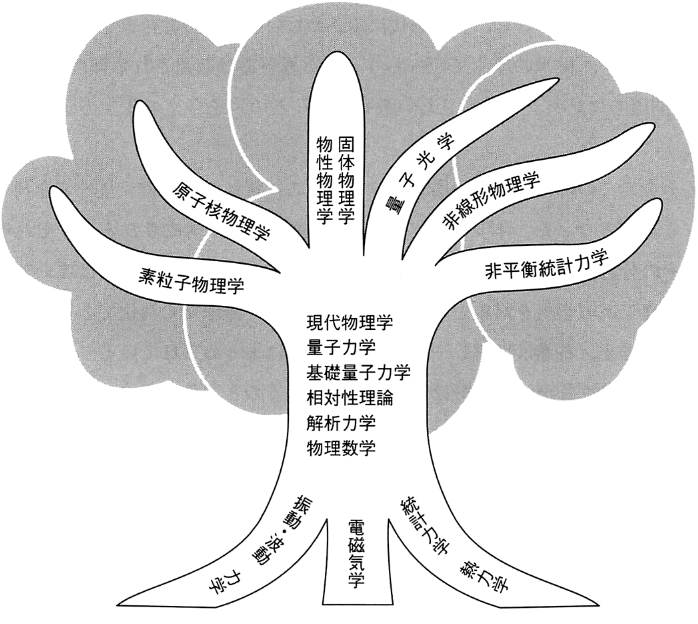
裳華房では古くから，その時代にふさわしい物理学の教科書を企画・出版してきたが，従来の厚くてがっちりとした教科書は敬遠される傾向にあり，“半期用のコンパクトでやさしい教科書を”との声を多くの先生方から聞くようになった．

そこでこの時代の要請に応えるべく，ここに新しい教科書シリーズを刊行する運びとなった．本シリーズは 18 巻の教科書から構成されるが，それぞれその分野にふさわしい著者に執筆をお願いした．本シリーズでは原則的に大学理工系の学生を対象としたが，半期の授業で無理なく消化できることを第一に考え，各巻は理解しやすくコンパクトにまとめられている．ただ，量子力学と物性物理学の分野は例外で半期用のものと通年用のものとの両者を準備した．また，最近の傾向に合わせ，記述は極力平易を旨とし，図もなるべくヴィジュアルに表現されるよう努めた．

このシリーズは，半期という限られた授業時間においても学生が物理学の各分野の基礎を体系的に学べることを目指している．物理学の基礎ともいうべき力学，電磁気学，熱力学のいわば 3 つの根から出発し，物理数学，基礎

量子力学などの幹を経て，物性物理学，素粒子物理学などの枝ともいうべき専門分野に到達しうるようシリーズの内容を工夫した．シリーズ中の各巻の関係については付図のようなチャートにまとめてみたが，ここで下の方ほどより基礎的な分野を表している．もっとも，何が基礎的であるかは読者個人の興味によるもので，そのような点でこのチャートは一つの例であるとご理解願えれば幸いである．系統的に物理学の勉学をする際，本シリーズの各巻が読者の一助となれば編集委員にとって望外の喜びである．

阿部龍蔵，川村　清



序

今から2千年以上も昔の古代ギリシャ時代から，物質構造の究極粒子は知的好奇心に富んだ人々の関心の的でした．物質構造の基本的な粒子の研究が大きく進むようになったのは，約200年前に近代的な原子理論が誕生してからです．原子や原子核よりもさらに基本的な粒子である素粒子の研究が始まったのは約70年前です．

本書は，素粒子物理学入門のための教科書・参考書です．知的好奇心にあふれた多くの人々に素粒子の世界を紹介し，素粒子に親しんでもらいたいという気持ちで執筆しました．

超ミクロな存在である素粒子の性質は，身の周りにあるマクロな物質の示す性質とは大きく異なっています．また，素粒子の従う運動法則はマクロな物体の従うニュートン力学ではありません．新しい未知の世界を学ぶ際には，その世界を理解するために必要なものの見方と考え方を身につける，つまり基本的な概念（物理量）とその基礎にある実験事実を把握することが重要です．いいかえれば，基本的な素粒子現象と概念を定性的あるいは半定量的に，そして整理され互いにリンクされた形で理解することが必要です．

本書を執筆するに当って，難しい数式の使用はできる限り避けると共に，おおむね素粒子物理学の発展の歴史に沿って，素粒子の世界の見方と考え方の発展の跡を追うように試みました．しかし，執筆の都合上，話が前後せざるを得ない場合もあります．そのような場合には，第1章の後半に記したいくつかの用語の解説を参照して，先へ進んで下さい．素粒子の世界の見方，素粒子物理学の発展の歴史といっても，もちろん私の見方，私の見た発展の「歴史」です．こういう風に書けば素粒子の世界へ入り込みやすいだろうという立場で執筆しました．

素粒子物理学には標準理論が存在します．十数年前に提案された標準理論とは，それまでの素粒子理論の集大成で，標準という言葉は素粒子物理学を議論する際の標準（基準）という意味です．本書の目標は，標準理論とはどのような理論であり，標準理論の提案後に得られた実験結果でどのような修正が必要になったかをおおむね理解できるようになることです．

本書を理解するために必要な予備知識は，力学，電磁気学，量子力学の初等的な知識です．

注意を重ねましたが，誤りや誤植があるかもしれません．そのような場合にはご指摘頂けると幸いです．

「1学期間の授業に対応する教科書」というのがこのテキストシリーズの編集方針ですので，本書の説明には連想，類推などを期待している部分があります．そのような箇所で引っかかったら，ひとまず読んで先へ進んで下さい．なお，本書を授業で教科書として使用する際には，各章の前半を中心に講義すればよいように執筆しました．

本書を執筆する際に，随所で感謝の念と共に懐かしく思い出した，学生時代に指導して頂いた宮沢弘成先生，研究者になってから研究生活の場を共にさせて頂いた，朝永振一郎，福田信之，宮本米二，マレー・ゲルマン，南部陽一郎，亀淵 迪，近藤都登，岩崎洋一の諸教授にあらためてお礼申し上げます．なお，コラムには私の思い出話を書きました．授業中の雑談のつもりでお読み頂けると幸いです．

最後になりましたが，写真，実験データなどの資料を提供して頂いた研究機関，実験グループに感謝いたします．

2003年6月

原　康夫

目　　次

1. はじめに

2. 素粒子の特徴　― 粒子性と波動性 ―

3. 素粒子の世界を探る

4. 相対性理論

5.　核力とパイ中間子

6.　ディラック方程式

7.　ニュートリノと弱い相互作用

8.　ハドロンとクォーク

9.　フェルミオンの世代と混合

10.　お わ り に

付　　録

コ　ラ　ム

1 はじめに

素粒子物理学の歴史と現状を簡潔に学び，素粒子物理学の学習を始めていこう．

§1.1 素粒子物理学の誕生と発展

物質を構成する基本的な粒子の研究の歴史をさかのぼると，紀元前400年頃に活躍したギリシャの哲学者デモクリトスの原子論にたどりつくが，化学の授業で学ぶ原子・分子という考えは，いまから約200年前にドルトンが提案し（1803年），アボガドロが精密化した（1811年）．

分割できない粒子という意味のアトム（原子）は実際には分割可能で，原子の中には**電子**が存在することがトムソンによって発見された（1897年）．電子は負電荷 $-e$（e は電気素量）をもち，質量が（一番軽い原子である）水素原子の質量の約2000分の1しかない軽い粒子である．

1911年にラザフォードは，直径が約 10^{-10} m の原子の中心には，原子の質量のほとんどを担い，電気素量 e の原子番号倍の正電荷 Ze をもつ，直径が約 10^{-14} m の原子核が存在し，その周りを Z 個の軽い電子が囲んでいることを明らかにした．原子核と電子を結び付けて原子を作っている引力は，原子核の正電荷 Ze と電子の負電荷 $-e$ の間にはたらく電気力である．

さらに1919年に彼は，速いアルファ粒子を窒素原子核に衝突させると，窒素原子核が破壊されて水素原子核が放出されることを発見した．そこで，

彼は水素原子核を原子核の構成粒子と見なし，第1を意味するギリシャ語のプロトスにちなんで，**プロトン**（**陽子**）と名付けた．

1932年にはイギリスのチャドウィックによって**中性子**が発見され，原子核は正電荷 e を帯びた陽子と電気的に中性な中性子から構成されていることがわかった．

質量がほぼ等しい陽子と中性子を総称して**核子**という．原子番号は原子核に含まれる陽子の数であり，原子の中に存在する電子の数でもある．そして，原子核に含まれる陽子数と中性子数の和を原子核の質量数という．また，陽子や中性子の間にはたらいて原子核を構成する力は，万有引力とも電気力とも異なる第3の力であり，**核力**とよばれる．

このようにして，物質は電子（記号 e^-，右肩の符号は電荷を表す）と陽子（記号 p^+）と中性子（記号 n^0）から構成されていることになったので，1930年代から，これらの粒子と光の粒子である光子（記号 γ）を**素粒子**（elementary particles）とよぶようになった．素とは素材の素なので，物質の素（もと）になる粒子という意味である．ただし，次章で説明するように，「素粒子」は粒子としての性質と波としての性質の両方を示すことを注意しておく．

したがって，素粒子の研究が始まり，素粒子物理学が誕生したのは1930年代のことである．1930年代の素粒子物理学が取り組んだ大きな問題には，(1) 相対論的な場の量子論の建設，(2) ベータ崩壊の理論的解明，(3) 核力の理論的解明，の3つがあった．これらの問題については，第5～7章で学ぶが，その内容を予告しておこう．

相対論的な場の量子論

相対論的な場の量子論とよばれる，相対性理論（第4章を参照）と量子論（第2章を参照）を統一した理論のくわしい解説は本書の程度を超えるので割愛するが，第6章で学ぶように，相対論的な場の量子論では，すべての素粒子にはその**反粒子**が存在する．反粒子とは，質量が同じで逆符号の電荷を

もつ粒子のことである．電子の反粒子は**陽電子**（記号 e^+）で，1932 年にアンダーソンによって発見された．陽子の反粒子は反陽子，中性子の反粒子は反中性子とよばれる．光子の反粒子は自分自身である．

電子と陽電子のような粒子と反粒子のペアが衝突すると，ペアが消滅してその質量はエネルギーに転化する．そして，このエネルギーは新しい粒子とその反粒子のペアの生成によって再び質量という形態のエネルギーになったり，いくつかの光子のエネルギーになったりする．

ベータ崩壊　― 素粒子の生成と消滅 ―

化学反応では，原子が消滅したり発生したりすることはない．これに対して，素粒子は発生したり消滅したりするという著しい特徴をもつ．前項では粒子と反粒子の消滅が出てきたが，別の例として，中性子のベータ崩壊を考えよう．中性子は原子核の中では安定に存在するが，単独では不安定で，平均 15 分で崩壊して，陽子と電子とニュートリノ（記号 ν^0）になる．

$$n^0 \;\rightarrow\; p^+ + e^- + \nu^0$$

ニュートリノは，1930 年にパウリによって存在が予言された，質量が極めて軽く，電荷を帯びていない素粒子である．1934 年にフェルミは，ニュートリノの存在を仮定することによって，ベータ崩壊で発生する電子のエネルギースペクトルを理論的に見事に説明した．上の反応式を眺めると，中性子は陽子と電子とニュートリノから構成されている不安定な複合粒子（束縛状態）だと考えたくなる．しかし，ニュートリノと電子や陽子の間にはたらく力は非常に弱いので，中性子の中にこれらの粒子が存在して結合し合っているとは考えられない．ベータ崩壊が起こる瞬間に中性子が消滅し，その瞬

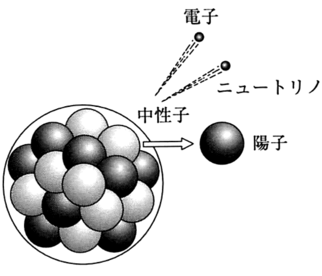


図 1.1　ベータ崩壊．不安定な原子核の中の中性子は電子と陽子とニュートリノになる．この変換を引き起こすのは「弱い相互作用」である．

間に陽子と電子とニュートリノが発生すると考えるべきである（図 1.1）.

保 存 量

ベータ崩壊における素粒子の生成・消滅の際にも電荷は保存していることに注意しよう．すべての素粒子は生成・消滅し，生成・消滅の際に電荷が保存するという特徴をもつ．素粒子の生成・消滅の際に保存する量は，電荷のほかにいくつか存在する．ベータ崩壊の前でも後でも核子の数は 1 で，変化していない．これを原子核物理学では質量数の保存というが，素粒子物理学では**バリオン数**の保存という．陽子と中性子のバリオン数を 1，反陽子と反中性子のバリオン数を −1，電子，陽電子，光子，ニュートリノなどのバリオン数を 0 と決めると，すべての素粒子反応でバリオン数が保存することが確かめられている．電荷やバリオン数のような保存量の存在は，素粒子物理学の重要な特徴の 1 つである．

核力の中間子論

1935 年に湯川秀樹は，「陽子や中性子は**パイ中間子**（記号 π）とよばれる未知の素粒子を交換することによって引力をおよぼし合う」という核力の中間子論を提唱した（図 1.2）．核力ばかりでなく，素粒子のすべての相互作用は素粒子の交換を仲立ちにして行われる．相互作用の到達距離は交換され

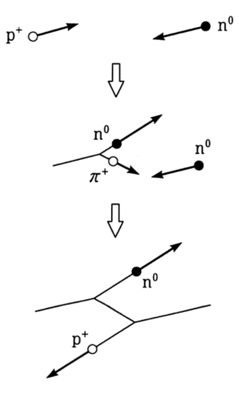


図 1.2　核子の間でのパイ中間子の「キャッチボール」によって核力が生じる．

る素粒子の質量に反比例するので，この事実を利用して，湯川はパイ中間子の質量を予測した．そして1947年に，予測どおりの質量をもつパイ中間子が発見された．これは素粒子物理学の大きな成果である．

予想されていなかった素粒子の発見

陽電子などの反粒子，ベータ崩壊で放出されるニュートリノ，核力を仲立ちするパイ中間子などは素粒子理論の研究者によって存在が予言され，その後で素粒子実験の研究者によって発見された素粒子である．

しかし，理論的に予言されていなかった多くの素粒子も発見された．パイ中間子よりも軽く，物質との相互作用が強くない**ミュー粒子** μ^+ と μ^- が1937年に発見された．また，1947年以降に，物質と強く相互作用するが寿命は比較的に長く，ストレンジネスという新しい保存量をもつ，**奇妙な粒子**とよばれる，一群の粒子が見つかった．

§1.2 素粒子の分類

ハドロンとレプトン

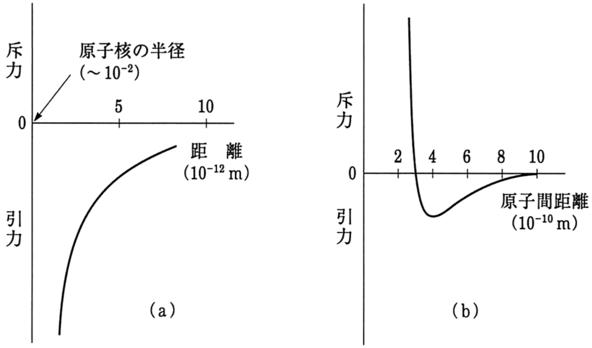
新しい素粒子が次々に発見されるようになると，素粒子の分類・整理作業が始まった．物質と強く相互作用するか，しないかによって，素粒子はハドロンとレプトンに大別される．核力などによって物質と強く相互作用する陽子，中性子，パイ中間子，奇妙な粒子などは，すべて**ハドロン**である．これに対して，核力のような強い力で物質と強く作用し合わない，電子，ニュートリノ，ミュー粒子は**レプトン**である．なお，光子は**ゲージボソン**とよばれる基本的な相互作用を仲立ちする別格の素粒子である．ハドロンはさらにバリオン数が1の**バリオン**（重粒子）とバリオン数が0のメソン（中間子）に分類される．陽子と中性子はバリオンで，パイ中間子はメソンである．

ハドロンを構成する基本粒子のクォーク

100種類以上存在する原子が物質の究極粒子ではないように，100種類以上が発見されているハドロンも究極粒子としての素粒子ではないだろう．

それでは，すべてのハドロンが究極粒子ではないとしても，安定なハドロンの陽子が究極粒子の１つである可能性はあるだろうか．その可能性はないことが，図 1.3(c) の核力と図 (b) の原子間力を比較してみれば理解できる．

図 (a) の電子と原子核の間にはたらく電気力が距離の２乗に反比例するという簡単な形の力なのに，原子間力が複雑な形をしている理由は，原子が原子核と電子から構成されている複合粒子だからである．つまり，複合粒子の間にはたらく力は構成粒子が互いに作用し合う力の合力なので，複雑な形



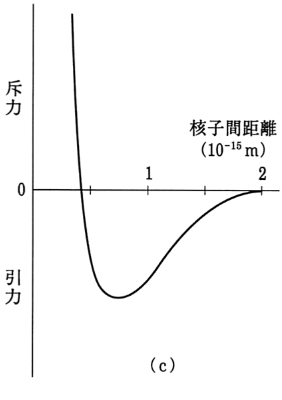


図 1.3　さまざまな粒子の間にはたらく力
(a)　原子核と電子の間の電気力
(b)　原子間力
(c)　核力

をしているのである．

図 (c) の核力は，原子間力と同じように，近距離では反発力，遠距離では引力という形をしている．これは陽子も中性子も，原子と同じように，構造をもつ複合粒子だからである．現在では，100 種類以上も存在するハドロンは真の意味の素粒子ではなく，1963 年にゲルマンとツバイクが提唱した**クォーク**とよばれる，より基本的な粒子とその反粒子である反クォークから成る複合粒子だと考えられている．バリオンはクォーク 3 個から構成された複合粒子で，メソンはクォーク 1 個と反クォーク 1 個から構成された複合粒子である（図 1.4）．クォークにはアップ（u），ダウン（d），ストレンジ（s），チャーム（c），ボトム（b），トップ（t）の 6 種類が存在する．ハドロンとクォークについては第 8 章でくわしく学ぶ．

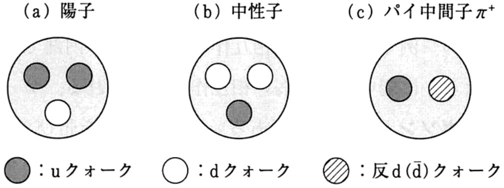


図 1.4　クォーク模型
(a)　陽子は uud
(b)　中性子は udd
(c)　正電荷のパイ中間子は $u\bar{d}$

強い相互作用をしない素粒子のレプトンとしては，電子，ミュー粒子，タウ粒子，電子ニュートリノ，ミューニュートリノ，タウニュートリノの 6 種類しか存在が知られていない．そこで，これらのレプトンはすべて究極粒子だと考えられている．

§1.3　素粒子の基本的な相互作用

素粒子と総称されている粒子のすべてが物質構造の究極粒子というわけではなく，クォークとレプトンが現段階での究極粒子だということになった．

クォークとレプトンの行う相互作用が素粒子の基本的な相互作用である．**基本的相互作用**は**ゲージ原理**とよばれる原理から導かれ，**ゲージボソン**とよばれる素粒子によって仲立ちされる．基本的相互作用は次の4種類である．

1. **電磁相互作用**　すべての荷電素粒子の間に作用する相互作用である．ゲージボソンは光子である．光子は質量が0で，電荷を帯びていない．
2. **強い相互作用**　核子の間に作用して原子核を構成する核力は強い相互作用の一例である．基本的な強い相互作用の理論は**QCD**（**量子色力学**）である．QCDでは，クォークはカラーとよばれる新しいタイプの荷電を帯びていて，カラー荷電を帯びている**グルオン**（にかわの粒子）とよばれるゲージボソンの仲立ちで強い相互作用が生じる．
3. **弱い相互作用**　原子核のベータ崩壊を引き起こす相互作用は弱い相互作用の一例である．この相互作用は原子核の内部では核力や電気力よりはるかに弱いので，弱い相互作用とよばれる．ゲージボソンは**ウィークボソン**とよばれ，正あるいは負の電荷を帯びている**Wボソン** W^+，W^- と電荷を帯びていない**Zボソン** Z^0 がある．3つとも質量は大きく，陽子の質量の約100倍である．中性子のベータ崩壊は，Wボソンを仲立ちにして，図1.5のような過程で起こる．Wボソンの質量はとても大きいので，この崩壊はゆっくり起こるのである．

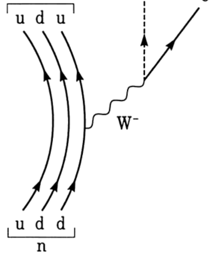


図1.5　中性子のベータ崩壊は，弱い相互作用のゲージボソンであるWボソンによって仲立ちされる．

つまり，質量の大きなＷボソンとＺボソンを仲立ちにする相互作用は弱い相互作用なのである．

4．**重力相互作用**　重力はすべての素粒子に作用する．ゲージボソンは**重力子**（グラビトン）とよばれる．

表1.1　基本的な相互作用とゲージボソン

相互作用		ゲージボソン	質　量
強		グルオン	0
電弱	電　磁	光　子	0
	弱	ウィークボソン (W^+, W^-, Z^0)	W：陽子の約86倍 Z：陽子の約97倍
重　力		重力子	0

このように，究極粒子にはクォーク，レプトン，ゲージボソンの3種類があり，上記の4種類の基本的な相互作用を行っている（表1.1）．

究極粒子にはこのほかに**ヒグスボソン**が存在し，ヒグス相互作用および湯川相互作用とよばれる相互作用を通じて，素粒子に質量を与えている．

§1.4　素粒子物理学とは

素粒子物理学の研究内容は，

1．素粒子を基本的な素粒子と複合的な粒子に整理・分類する

2．基本的な素粒子がどのような相互作用を行い，どのような保存量をもつのかを調べる

3．素粒子のモデルを定式化し，そのモデルに基づく理論的予測を行い，実験によって予測を検証する

ことである．素粒子の整理・分類は，質量，スピンなどのほかに，電荷などの保存量を使って行う．保存量は相互作用と密接に結び付いているので，素粒子の整理・分類と素粒子の相互作用は切り離せない．

現在，素粒子現象を考える際の基準となる理論として，第7～9章で紹介する，**素粒子の標準模型**が存在する．本書の主要な学習目標は，標準模型の

理解である．

もちろん，素粒子物理学は，理論的に予測されなかった素粒子や現象の発見によっても大きく発展してきたことを忘れてはならない．

湯川秀樹博士と朝永振一郎博士

日本で素粒子研究を創始し大きく発展させたのは，湯川秀樹博士（1907 - 1981）と朝永振一郎博士（1906 - 1979）である．湯川博士は核力の中間子論を提唱し，朝永博士は電磁気学の相対論的な量子論である量子電磁気学を定式化し，その理論的困難を解決するくり込み理論を提唱した．湯川博士は 1949 年にノーベル物理学賞を受賞し，朝永博士はシュウィンガー博士，ファインマン博士と共に 1965 年にノーベル物理学賞を受賞した．

皆さんがお二人の考えや人柄を知るには，「湯川秀樹著作集」（岩波書店）や「朝永振一郎著作集」（みすず書房）などに収録されている文章を読むのが良い方法である．お二人の文章の特徴を簡単に紹介しよう．

湯川博士は幼少の頃から家庭で四書五経を学ばれ，中国古典への造詣が深かったためか，「日本では科学というものがあまりに狭く考えられている．私たちの日常の生活態度が合理的になるということが，広い意味における科学の進歩である」とか「若い人にとっては，昔のことは勉強せずに，さっと飛び込んで行ける方がいいかも知れません．私も昔はそうだったのです」という文章に見られるように，簡潔にして明快で核心をついている．しかし，湯川博士の話し言葉には優雅な京都弁の響きがあった．

これに対して，朝永博士の文章は「第１次世界大戦も終わった頃，手のつけやすかった惑星電子に関する研究はおおかたやることもなくなって，そろそろ原子核の中がどうなっているかを学者が気にしだした．しかし，なにしろ原子核はちょっとのことで外から影響を与えることができないので，その研究には実験技術の大きな進歩が必要である．お寺の内陣を拝観するには特別な資格やおさい銭がいるように，原子の内陣に入り込むにも特別な技術がいるし，またそのために費用もかかる」というように日本的表現によって論理的にしかも正確に理解させよう，という気配りが感じられる．朝永博士の話術は才気煥発で，京都育ちの江戸っ子弁的な響きがあった．

2 素粒子の特徴
粒子性と波動性

素粒子には粒子のもつ性質と波のもつ性質の両方を示すという二重性がある．このような二重性をもつ物質の従う運動法則が量子力学である．この章では，本書を読み進んで行くために必要な量子力学の基礎知識を簡単に復習する．

§2.1 粒子でもあり，波でもある素粒子

物質の基本的な構成要素の電子，陽子，中性子は素粒子とよばれている．素粒子という言葉には，物質を細かく砕いていったときに，これより細かくは砕けない最小の粒子というイメージがある．

さて，トムソンが発見した電子は，決まった大きさの質量と電荷をもち，電磁場の中ではニュートンの運動法則に従う荷電粒子として振舞い，蛍光物質に衝突すると，輝点を発生させ，1 個，2 個，…と数えられるという粒子的性質を示す．

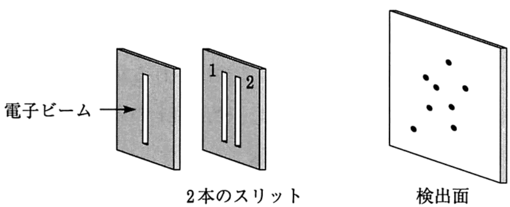


図 2.1　電子ビームと 2 本のスリット 1, 2

ところが，粒子のように振舞う電子は，一方で波の性質も示す．電子顕微鏡の電子源から出てくる電子の流れの中に2本のスリット（細い隙間）のある障害物を置き（図2.1），その前方に置いてある検出面に到達した電子を記録したものが，図2.2に示す写真である．写真eを見ると，波の特徴である干渉現象を示す明暗の縞が読み取れる．つまり，この写真は，2本のスリットを通過した2つの電子波 ψ_1 と ψ_2 が合流して重なり合って $\psi = \psi_1 + \psi_2$ となり，検出面上で ψ_1 と ψ_2 の位相が一致する場合には強め合い，逆位相の場合には弱め合うという干渉効果によって，電子波の強度分布 $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$ が明暗の縞を作ることを示している．この実験は，装置の内部に2個以上の電子が同時に存在することはまれであるような状況で行ったので，この明暗の縞は2個以上の電子の相互作用によって生じたのではない．電子が分割できない粒子なら，2本のスリットのどちらか一方しか通過できないはずなのに，この写真は，1個の輝点を生じさせる「1個の」電子が2本のスリットの両方を同時に通過したことを示しているのである．

さて，明暗の縞が形成されていく過程を記録した写真a～eを順に見ると，明暗の縞の輝度が連続的に増加していくのではなく，「粒子」としての電子が1個ずつ検出面に衝突して，輝点を発生させていることがわかる．そして，場所によって衝突する確率に大小の差があるので，明暗の縞が形成されていくことがわかる．干渉縞という波動現象の現れは，「粒子」（電子）が検出される確率 $|\psi|^2$ の大小の空間的分布として理解できるのである．

このように，古典力学の場合と異なり，同一条件で電子を1個ずつ入射する実験を多数回行った場合には，検出面上で「粒子」としての電子を検出する位置はバラバラで，次の電子がどこで検出されるかを予言することは不可能である．量子力学が予言できるのは，検出面上の各点 (x, y, z) で電子を発見する確率 $|\psi(x, y, z)|^2$ なのである．

電子は粒子と波の両方の性質，つまり，**二重性**を示すことがわかった．電子の二重性を

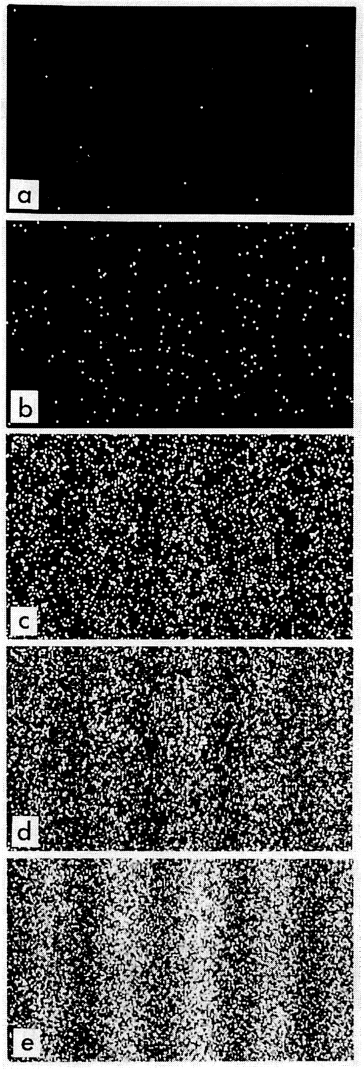


図 2.2　電子顕微鏡による干渉縞の形成過程（電子顕微鏡による電子の２スリット干渉実験）．エネルギーの決まった電子が，２本のスリットを通過して，位置の分解能の良い電子検出器に１個また１個と間隔をおいてやってくる．電子が検出器の表面の蛍光フィルムに達すると，そこで検出され，記録装置に記録されて，モニターに写し出される．この写真には，電子が検出面に１個ずつ到着し，その結果，干渉縞が形成される様子を写真 a～e で時間の順に示す．電子顕微鏡の内部に２個以上の電子がいることはまれであるように実験したので，この干渉縞は１個の電子の量子的な干渉による．（日立製作所基礎研究所 外村 彰博士提供）

「電子は空間を波として伝わり，物質によって放出・吸収されるときには粒子として振舞う」

と理解してよい．ここで中心的役割を演じるのは，電子の状態を表す**波動関数** ψ であり，波動関数を決める方程式がシュレーディンガー方程式である．

陽子や中性子，そして光も，電子と同じように，粒子と波動の二重性を示す．また，原子核，原子，分子なども二重性を示す．この二重性を示すものを量子とよぶ．

なお，粒子としてエネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ ($p = |\boldsymbol{p}|$) をもつ量子のビームが波動性を示すときの振動数を ν，波長を λ とするとき

$$E = h\nu \tag{2.1}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{2.2}$$

という関係があり，粒子性と波動性の間には密接な関係がある．ここで h は，量子の世界のスケールを表す，プランク定数である．

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \tag{2.3}$$

§2.2　ミクロな世界の自然法則　— 量子力学 —

シュレーディンガー方程式

分子，原子，原子核，電子，陽子，中性子のような二重性を示す量子が，光速に比べて速さが遅いときに従う力学は量子力学である．そして，ニュートン力学でのニュートンの運動方程式に対応するのが，1926 年にシュレーディンガーが発見した**シュレーディンガー方程式**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)\,\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.4}$$

である．$\hbar$ はエイチバーと読み，$\hbar = h/2\pi = 1.0546 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ である．

(2.4) は，力のポテンシャル $V(x, y, z)$ の中を運動する質量 m の粒子の非相対論的なエネルギーの式，

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z) \tag{2.5}$$

の E と $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ に対して

$$\left.\begin{array}{c} E \;\to\; i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} \\ p_x \;\to\; -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \;\to\; -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \;\to\; -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

という置き換えを行って得られる演算子

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

を波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ に作用させた形の式となっている．

平面波と運動量演算子

外力を受けずに等速直線運動を行っている電子に対するシュレーディンガー方程式，すなわち，(2.4) で位置エネルギー $V(x, y, z) = 0$ の場合の1つの解は，$+x$ 方向に進む平面波

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \cos\frac{px - Et}{\hbar} + i\sin\frac{px - Et}{\hbar} \\ &= e^{i(px - Et)/\hbar}\end{aligned} \tag{2.7}$$

である．ただし，2つの定数 E と p は $E = p^2/2m$ という関係を満たしているものとする．この平面波の波長 λ と振動数 ν は $\lambda = h/p$, $\nu = E/h$ なので，(2.1)，(2.2) を思い出すと，$+x$ 方向に進む平面波 (2.7) は，エネルギー E，運動量 p をもって $+x$ 方向に進む電子ビームに対応する電子の波動関数であることがわかる．

関数 $e^{ipx/\hbar}$ に微分演算子 $-i\hbar\,\partial/\partial x$ を作用させると

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{ipx/\hbar}=pe^{ipx/\hbar} \tag{2.8}$$

となる．$-i\hbar\nabla=(-i\hbar\,\partial/\partial x, -i\hbar\,\partial/\partial y, -i\hbar\,\partial/\partial z)$ を運動量演算子とよぶ．$e^{ipx/\hbar}$ は運動量演算子の固有関数で，$\boldsymbol{p}=(p,0,0)$ はその固有値である．量子力学では運動量は演算子であり，波動関数がその固有関数の場合には，固有値が運動量の測定値として得られる．

演算子としての物理量と交換関係

量子力学では，運動量ばかりでなく，すべての物理量は演算子である．

演算子としての位置座標 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は関数 $F(x,y,z)$ に作用すると，それを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 倍して，$\boldsymbol{r}F(x,y,z)=[x\,F(x,y,z),\ y\,F(x,y,z),\ z\,F(x,y,z)]$ にする演算子であり，角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は $-i\hbar\boldsymbol{r}\times\nabla$ という演算子である．

ニュートン力学では，2つの物理量は可換（交換可能）である．たとえば，x と p_x は可換で $xp_x-p_xx=0$ であるが，量子力学では，任意の関数 $F(x)$ に対して，

$$\begin{aligned}xp_x\,F(x)-p_xx\,F(x)&=x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}F(x)\right)-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}[x\,F(x)]\right)\\&=i\hbar\,F(x)\end{aligned}$$

なので，x と p_x は可換ではなく，

$$xp_x-p_xx=x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x=i\hbar \tag{2.9}$$

という**交換関係**に従う．交換関係 (2.9) は，x の測定値の不確定さ $\varDelta x$ と p_x の測定値の不確定さ $\varDelta p_x$ に対して

$$\varDelta x\,\varDelta p_x \geqq \frac{\hbar}{2} \tag{2.10}$$

という**不確定性関係**があることを意味している．

なお，角運動量演算子 $\boldsymbol{L} = -i\hbar\boldsymbol{r}\times\nabla$ の交換関係は

$$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L} = i\hbar\boldsymbol{L} \tag{2.11}$$

である．

§2.3 ス ピ ン

量子力学で学んだように，電子，陽子，中性子は**スピン**という自由度をもつ．スピンは古典力学の自転角運動量に対応するが，電子，陽子，中性子のスピンの特定の方向の成分，たとえば z 方向の成分を測定すると，測定結果 s は常に $\hbar/2$ か $-\hbar/2$ であるという特徴がある．したがって，電子，陽子，中性子などの状態は波動関数 $\psi(x, y, z, s, t)$，つまり，$\psi(x, y, z, \hbar/2, t)$ と $\psi(x, y, z, -\hbar/2, t)$ で表される．

この 2 つの成分を上下に並べて，スピノルとよばれる 2 行 1 列のベクトル

$$\psi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, z, t) \\ \psi_2(x, y, z, t) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

として表すこともできる．さらに別の表し方として，2 つの独立なスピノル

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

を導入して，(2.12) を次のように表すこともできる．

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_1(x, y, z, t)\,\alpha + \psi_2(x, y, z, t)\,\beta \tag{2.14}$$

このような 2 成分の波動関数で表される粒子を**スピン 1/2 粒子**という．スピン 1/2 粒子のスピン角運動量演算子 $\boldsymbol{S}$ は，**パウリ行列**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

を使って，

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \qquad (\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)) \tag{2.16}$$

と表される．なお，$\boldsymbol{S}$ も $\boldsymbol{L}$ と同じ形の交換関係 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S} = i\hbar\boldsymbol{S}$ を満たす．

§2.4　多粒子系の量子力学

2粒子系のシュレーディンガー方程式

シュレーディンガー方程式（2.4）は電子が1個だけ存在する場合の運動法則である．多数の電子を含む電子ビームに量子力学を適用する場合でも，電子ビームの粒子密度が小さく，電子間の電気力が無視できる場合には（2.4）を使える．いま，外力のポテンシャル $V(x, y, z)$ の中に2個の電子が存在し，ポテンシャル $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ をもつ力で相互作用し合っている系を考えよう．この2電子系のエネルギー E は

$$E = \frac{p_1{}^2}{2m} + \frac{p_2{}^2}{2m} + V(x_1, y_1, z_1) + V(x_2, y_2, z_2) + V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{2.17}$$

なので，（2.6）に対応する置き換えを行った演算子が作用する偏微分方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z_1{}^2}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_2{}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z_2{}^2}\right)$$
$$+ V(x_1, y_1, z_1)\psi + V(x_2, y_2, z_2)\psi + V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.18}$$

が，2電子系のシュレーディンガー方程式である．2電子系の状態を表す波動関数は

$$\psi(x_1, y_1, z_1, s_1, x_2, y_2, z_2, s_2, t) \tag{2.19}$$

である．ここでスピン変数 s_1，s_2 は $\pm\hbar/2$ の2つの値のみをとる変数である．

古典的な波動を表す関数は媒質の変位を記述する関数なので，

$$F(x, y, z, s, t)$$

という形をしている．また一般に，波動関数の従う波動方程式は波動関数の高次の項を含む非線形偏微分方程式である．線形偏微分方程式（2.18）や2個の電子の座標を変数とする波動関数（2.19）は，古典的な波動とは異質のものである．

同種粒子の波動関数

電子，陽子，中性子，光子などは質量，電荷，スピン角運動量などをもつ．ところで，同じ種類の粒子はまったく同じ質量，電荷，スピン角運動量の大きさをもつので，同じ種類の粒子は互いに区別できない．そこで，同じ種類の粒子を，まったく同一の粒子という意味で**同種粒子**という．

一般に，2 個の同種粒子の波動関数は（2.19）のように表される．この波動関数の 2 個の粒子の位置座標，スピン座標を入れ換えると

$$\psi(x_2, y_2, z_2, s_2, x_1, y_1, z_1, s_1, t) \tag{2.20}$$

となる．これは 1 個の電子の座標が x_2，y_2，z_2，s_2 で，もう 1 個の電子の座標が x_1，y_1，z_1，s_1 という状態を表している．2 個の電子はまったく同一なので，この状態は波動関数（2.19）が表す 1 個の電子の座標が x_1，y_1，z_1，s_1 で，もう 1 個の電子の座標が x_2，y_2，z_2，s_2 という状態とまったく同じである．

量子力学では，位相だけが異なる波動関数は同じ状態を表すという事実と，波動関数（2.20）においてもう一度座標の入れ換えを行うと最初の波動関数（2.19）にもどるという事実，

$$\begin{aligned}\psi(x_2, y_2, z_2, s_2, x_1, y_1, z_1, s_1, t) &= c\,\psi(x_1, y_1, z_1, s_1, x_2, y_2, z_2, s_2, t)\\ &= c^2\psi(x_2, y_2, z_2, s_2, x_1, y_1, z_1, s_1, t)\end{aligned} \tag{2.21}$$

から，

$$c^2 = 1, \quad \text{つまり} \quad c = 1 \quad \text{または} \quad c = -1 \tag{2.22}$$

が導かれる．そこで，2 個の同種粒子の波動関数は，入れ換えで対称な

$$\psi(x_2, y_2, z_2, s_2, x_1, y_1, z_1, s_1, t) = \psi(x_1, y_1, z_1, s_1, x_2, y_2, z_2, s_2, t) \tag{2.23}$$

か（$c = 1$ の場合），入れ換えで反対称な

$$\psi(x_2, y_2, z_2, s_2, x_1, y_1, z_1, s_1, t) = -\,\psi(x_1, y_1, z_1, s_1, x_2, y_2, z_2, s_2, t) \tag{2.24}$$

（$c=-1$ の場合）のどちらかであることがわかる．

さて，実験結果によれば，

> 「スピンが 0，1，2，…（スピン角運動量の大きさが $\hbar$ の整数倍）の同種粒子の波動関数は粒子の変数の入れ換えで，(2.23) のように，対称である．
>
> 一方，スピンが 1/2，3/2，5/2，…（スピン角運動量の大きさが $\hbar$ の 1/2，3/2，5/2，… 倍(半奇数倍)）の同種粒子の波動関数は変数の入れ換えで，(2.24) のように，反対称である．」

この事実を**スピンと統計の関係**といい，前者を**ボソン**あるいはボース粒子，後者を**フェルミオン**あるいはフェルミ粒子という．この関係は相対論的な場の量子論から導かれる．

フェルミオンの場合は，(2.24) で $(x_1, y_1, z_1, s_1) = (x_2, y_2, z_2, s_2) = (x, y, z, s)$ とおくと

$$\psi(x, y, z, s, x, y, z, s, t) = 0 \tag{2.25}$$

となるが，この式は，このような状態になる確率は 0，つまり

> 「2 個以上のフェルミオンは同じ状態(位置とスピンの向きが同じ状態)には存在できない」

ことを意味する．これを**パウリの排他原理**（あるいは**パウリ原理**）という．これに対して，ボソンは何個でも同一の状態を占められる．

陽子，中性子，電子はスピンが 1/2 なのでフェルミオンであり，光子はスピンが 1 なのでボソンである．

基底状態にある同一種類の原子や原子核は互いに区別できないので，この節の議論は，原子や原子核のような複合粒子に対しても成り立つ．なぜなら，原子や原子核が励起しない場合には，原子や原子核の状態は重心の位置座標と合成スピンの z 成分を変数とする波動関数で記述されるので，この節の議論がそのまま適用できるからである．第 8 章でくわしく学ぶように，陽子

や中性子はクォークから構成された複合粒子であるが，励起が無視できる場合には，それらも素粒子と見なせる．

波動場の量子力学

電子，陽子，中性子などは粒子性と波動性の両方を示すが，これまでは非相対論的な粒子像から出発して，波動関数に対するシュレーディンガー方程式を導いた．実は，非相対論的な波動像から出発しても，シュレーディンガー方程式（2.4），（2.18）などを導くことができる．

量子力学ではすべての物理量は演算子になるので，古典的な波動場も交換関係あるいは反交換関係とよばれる条件を満たす演算子になる．その結果，たとえば，マクスウェル方程式に従う電磁場は光子を生成したり消滅させたりする演算子になり，電磁気学は光波と光子の二重性を記述する理論である量子電磁気学になる．

非相対論的な電子波の理論から出発すると，非相対論的な電子場 $\psi(\boldsymbol{r}, s)$ は点 $\boldsymbol{r}$ にあるスピンの z 成分が s の電子を消滅させる演算子になり，$\psi(\boldsymbol{r}, s)$ のエルミート共役な場の $\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s)$ は点 $\boldsymbol{r}$ にあるスピンの z 成分が s の電子を生成する演算子になる．$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s)$ と $\psi^\dagger(\boldsymbol{r}', s')$ は反交換関係とよばれる関係

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s)\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r}', s') + \psi^\dagger(\boldsymbol{r}', s')\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s) = 0 \qquad (2.26)$$

を満たすが，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$，$s = s'$ の場合には，この条件は

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s)\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r}, s) = 0 \qquad (2.27)$$

となる．この式は同じ位置にスピンの z 成分が同じ電子を 2 個生成できないこと，つまり，同じ場所にスピンの向きが同じ電子は 2 個存在できないことを意味する．

§2.5　クライン - ゴルドン方程式

第 4 章で示すように，相対性理論によれば，外力の作用を受けずに真空中を自由に運動している粒子のエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ は，関係

$$E^2 = (|\boldsymbol{p}|\, c)^2 + (mc^2)^2 \tag{2.28}$$

を満たす．c は真空中での光の速さである．したがって，この粒子が波動性を示すときに従う波動方程式は，(2.28) に (2.6) の置き換えを行って得られる演算子を波動関数 $\phi(x, y, z, t)$ に作用した

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu^2 \phi \qquad \left(\mu = \frac{mc}{\hbar}\right) \tag{2.29}$$

である．この式を**クライン - ゴルドン方程式**という．

この方程式の一般解は，ϕ が複素数の値をとる場の場合には，平面波の重ね合せとして，

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3k \left[b(\boldsymbol{k})\; e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} + c^\dagger(\boldsymbol{k})\; e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \right] \tag{2.30}$$

と表せる．ただし，

$$\omega = (k^2 c^2 + \mu^2 c^2)^{1/2} \tag{2.31}$$

である．

量子論ではすべての物理量は演算子になるが，場 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ は素粒子を生成・消滅させる演算子になる．くわしくいうと，$b(\boldsymbol{k})$ は運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$，エネルギー $E = \hbar\omega$ をもつスピン 0 のスカラー粒子を消滅させ，$c^\dagger(\boldsymbol{k})$ はその反粒子を生成させる作用をもつ演算子である．このように，場の量子論は生成・消滅する素粒子にふさわしい理論であり，物質の粒子と波動の二重性を説明する理論である．

§2.6　遷移確率

素粒子は互いに衝突したり，崩壊したりする．このような過程を量子論で取扱うには，始状態 i から終状態 f への遷移確率 $w(\mathrm{i} \to \mathrm{f})$ を知る必要がある．相互作用が弱くて，摂動論が使える場合には，ディラックが導いた公式

$$w(\mathrm{i} \to \mathrm{f}) = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{\mathrm{f}}(E)\, |H_{\mathrm{fi}}'|^2 \tag{2.32}$$

を使えばよい．$\rho_{\mathrm{f}}(E)$ はエネルギーが E の終状態の状態密度である．

この公式は，素粒子の散乱，生成，崩壊などを計算し，理解する際の基本の公式なので，黄金則とよばれる．

演 習 問 題

［**1**］ 平面波 (2.7) の位相速度は $E/p = p/2m = v/2$ であり，群速度は $2E/p = p/m = v$ であることを示せ．

［**2**］ 2 電子系で電子 1 のスピン角運動量演算子を $\boldsymbol{S}^{(1)} = i(\hbar/2)\sigma^{(1)}$，電子 2 のスピン角運動量演算子を $\boldsymbol{S}^{(2)} = i(\hbar/2)\sigma^{(2)}$ とする．

（1） $\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)}$ の固有状態を求めよ．

（2） $\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)}$ の固有状態の 2 電子系の波動関数の変数 (x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) を入れ換えた場合にどのようになるかを説明せよ．

3 素粒子の世界を探る

物理学は実験科学である．第1章で学んだように，物質の究極構造を探求してきた先人たちが未知の世界を想像してきた能力と新しい理論を創造してきた能力のすばらしさには驚くばかりだが，理論の基礎になったのは実験事実であり，理論的な着想を具体化し，発展させるには新しい実験結果が必要であった．また，理論的に予想されなかった実験的な発見によって，だれも予想しなかった素粒子の新しい世界の存在が明らかになった．本章では，素粒子の世界を実験的に探る方法について簡単に解説する．

§3.1　素粒子の検出

素粒子検出の原理

直径が約 10^{-15} m の陽子や中性子，もっと小さな電子などを肉眼で直接に見ることは不可能であるが，電気を帯びている陽子や電子の飛跡を肉眼で見えるようにすることは可能である．その原理は，空のかなたを飛ぶ飛行機が見えなくても，飛行機雲を見て飛行機の航跡を知ることができるのと似ている．1つの方法は，放射線の写真作用を利用して，写真乾板中の荷電粒子の飛跡を記録することである．湯川が予想したパイ中間子は，この方法で発見された．

電子以外の荷電素粒子の検出には，主として，**電離作用**が利用されている．電気を帯びた粒子（荷電粒子）は，高速で物質中を通過するときに近く

の原子・分子に電気力を作用して，原子・分子中の電子を叩き出してイオンにする．したがって，荷電粒子の通った道筋に沿ってイオンの列ができる．そこで，このイオンの列を観測可能な形に変換し，増幅して，検出できれば，素粒子の飛跡がわかることになる．物質と信号の変換・増幅手段の組合せによって，これまでにいろいろな飛跡検出器が開発利用されてきた．

物質が過飽和の気体の場合には，荷電粒子の飛跡に沿って生じたイオンを核にして液化が始まり，霧粒の列ができる．この現象を利用した素粒子の検出装置が，ウィルソンの発明した霧箱である．また，物質が過飽和の液体の場合には，イオンを核にして気化が始まり，泡の列ができる．この現象を利用した素粒子の検出装置が，グレーザーの発明した泡箱である．

物質に電圧がかかっている場合には，発生したイオンや自由電子の移動が起こる．これを電気信号として検出し，荷電粒子の軌跡の位置を測定する装置として，初期には福井崇時と宮本重徳の発明した放電箱が使用された．現在では，荷電粒子の電離作用によるエネルギー損失も測定できる検出器である，シャルパックが発明した**多線式比例計数箱**（図 3.1）や**ドリフトチェン**

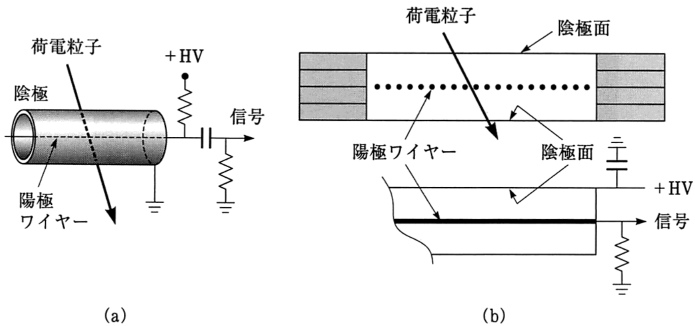


図 3.1　(a)　比例計数管
(b)　多線式比例計数箱では，陰極面と１本１本の陽極ワイヤーが１つの計数管を作っている．このような陰極面と陽極ワイヤーのセットを何層にも重ね，各層の陽極ワイヤーの向きを交互に垂直になるように設置すると，入射荷電粒子の飛跡を測定できる．

バーが広く使われている．

このようにして測定できるようになった素粒子の飛跡を3次元的に測定・分析して，以下に記すように，これらの素粒子の運動量，電荷，質量などを決定できる．

そのほか，光子（ガンマ線）や荷電粒子が当たると蛍光を発する物質（シンチレーター）を利用して，これらの粒子を検出する**シンチレーションカウンター**もある．

なお，高エネルギーの電子が物質に入射すると，物質によって電子の運動にブレーキがかかって，その反動で光子が発生する（制動放射という）．この光子が物質中を運動すると電子と陽電子のペアが発生し，発生した電子と

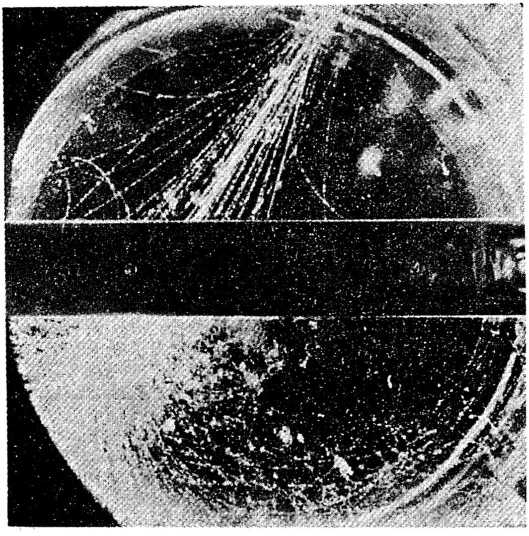
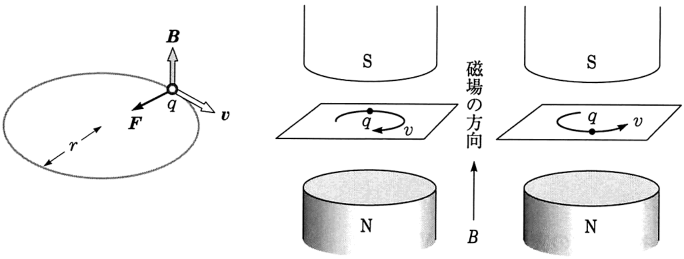


図 3.2　高エネルギーシャワーの霧箱写真．高エネルギー宇宙線粒子が霧箱の壁と，さらに中に入れた鉛板であたかもシャワーのように粒子数を増殖している．
（小田 稔 著：「物理学選書5　宇宙線（改訂版）」より）

陽電子が制動放射で光子を発生し，…というくり返しで，光子，電子，陽電子の数が増大していく（図 3.2）．この現象を**カスケードシャワー**という．したがって，カスケードシャワーを引き起こすほど高いエネルギーをもった電子が物質中でエネルギーを失う主な原因は電離作用ではない．もちろん，高エネルギーの光子が物質に入射してもカスケードシャワーが発生する．

素粒子の電荷の決め方

飛跡を残した荷電粒子は電子なのだろうか．陽子なのだろうか．荷電粒子が大きな電磁石の磁極の間に入ると，磁場が電荷に作用する磁気力によって荷電粒子の進路は曲がる．この曲がる向きから，荷電粒子の電荷の正負がわかる（図 3.3）．



(a) 向心力＝磁気力　　(b) 磁場の中での荷電粒子の運動（左：$q>0$，右：$q<0$）

図 3.3

運動量の決め方

荷電粒子は電子や陽子や 1 価のイオンであることが多いので，電荷の大きさは電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C だとする．一様な磁場 B の中で磁場に垂直に，速さ v，半径 r の等速円運動を行う質量 m の荷電粒子の相対論的な運動方程式は，運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を使って，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3.1}$$

である（等速円運動なので v^2 は一定）．向心加速度の大きさは v^2/r なので，この式の両辺の大きさは

$$\frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{v^2}{r}=evB \tag{3.2}$$

であり，次の関係，

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=p=erB \tag{3.3}$$

が導かれる．この関係はニュートン力学で導かれる関係 $mv=p=erB$ に対応する関係であるが，荷電粒子の運動量の大きさ p と半径 r の比例関係，

$$p=erB \tag{3.4}$$

は，相対性理論に従う高速の荷電粒子に対しても成り立つことがわかる．したがって，円運動の半径 r を測れば，(3.4) を使って，荷電粒子の運動量がわかる．

エネルギーの実用単位（eV）

素粒子物理学ではエネルギーの実用単位として，電位差が1ボルトの2点間で電子が加速された場合の運動エネルギーの増加量である1電子ボルト（$1\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$）の100万倍の1メガ電子ボルト，

$$1\,\mathrm{MeV}=10^6\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-13}\,\mathrm{J} \tag{3.5}$$

を使う．また，

1ギガ電子ボルト：　$1\,\mathrm{GeV}=10^9\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-10}\,\mathrm{J}$

1テラ電子ボルト：　$1\,\mathrm{TeV}=10^{12}\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-7}\,\mathrm{J}$

も使われる．

素粒子物理学では，運動量の実用単位としては，MeV を真空中の光速

$c = 3 \times 10^8$ m/s で割った,

$$1\,\mathrm{MeV}/c = 5.3 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m/s} \tag{3.6}$$

が使われる.

MeV/c を単位にして測った運動量の数値を $p\,[\mathrm{MeV}/c]$, m を単位にして測った半径の数値を $r\,[\mathrm{m}]$, T（テスラ）を単位にして測った磁場の強さの数値を $B\,[\mathrm{T}]$ と記すと,

$$1 = \frac{p}{erB} = \frac{p\,[\mathrm{MeV}/c]}{r\,[\mathrm{m}]\cdot B\,[\mathrm{T}]} \times \frac{5.3 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m/s}}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C\cdot m\cdot T}}$$

$$= \frac{p\,[\mathrm{MeV}/c]}{300r\,[\mathrm{m}]\cdot B\,[\mathrm{T}]} \tag{3.7}$$

なので,

$$p\,[\mathrm{MeV}/c] = 300r\,[\mathrm{m}]\cdot B\,[\mathrm{T}] = 3r\,[\mathrm{cm}]\cdot B\,[\mathrm{T}] \tag{3.8}$$

という関係が得られる. $r\,[\mathrm{cm}]$ は cm を単位にして測定した半径の数値である. $r = r\,[\mathrm{m}]\,\mathrm{m} = r\,[\mathrm{cm}]\,\mathrm{cm}$ と記すので, たとえば $r = 2\,\mathrm{m}$ の場合には $r\,[\mathrm{m}] = 2$, $r\,[\mathrm{cm}] = 200$ である.

素粒子物理学では, 質量の実用単位 $\mathrm{MeV}/c^2 = 1.782 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ も使われる. 電子の質量は

$$m_\mathrm{e} = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{3.9}$$

陽子の質量は

$$m_\mathrm{p} = 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938.3\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{3.10}$$

である.

例 1. 図 3.4 の渦を巻いている曲線は, 紙面の裏から表の方を向いている強さが $B = 1.0$ T の磁場の中に置かれた水素泡箱中での荷電粒子の飛跡の写真である. 荷電粒子の電荷の大きさを e とすると, この場合の (3.8) の $p\,[\mathrm{MeV}/c] = 3r\,[\mathrm{cm}]$ を利用して, 渦巻きの一番外側の部分での荷電粒子の運動量を推定できる. たとえば, $r = 6$ cm であれば, $p =$ 18 MeV/c である. 曲線の曲率半径の測定には, いろいろな半径の円弧を曲

線に重ねてみて，一番ピッタリ合う円弧の半径を選ぶのが実際的な方法である．

荷電粒子は運動中にエネルギーを失うので，運動量は次第に減少し，曲率半径は小さくなっていく．したがって，図 3.4 で観測された荷電粒子の運動の向きは，曲率半径の大きな渦巻きの外側の部分から曲率半径の小さな中心部の向きであることが推定できる．この結果を使うと，磁場は写真面の裏から表の方を向いているので，渦巻きを作った荷電粒子の電荷は負であることがわかる．

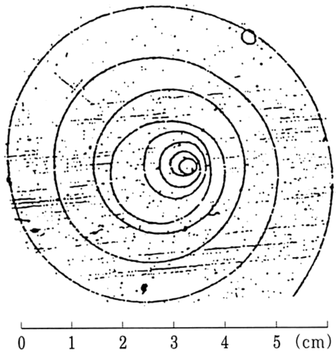


図 3.4　写真面の裏から表の方を向いた，強さが $B = 1.0\,\mathrm{T}$ の磁場の中で運動した荷電粒子の飛跡

例 2.　陽電子の発見　　1932 年にアンダーソンは，電磁石の磁極の間に置いた霧箱を使用して，電子と同じ質量をもち正電荷 e をもつ新しい素粒子である陽電子を宇宙線の中に発見した．

荷電粒子の運動量が大きいと，霧箱の中での運動量の変化による曲率半径の減少が小さく，飛跡を残した粒子の運動の向きがわかりにくい．そこで，アンダーソンは 1 枚の鉛の板を霧箱の中に入れた．荷電粒子は密度の大きい鉛の板を通過するときにエネルギーを失い，飛跡は図 3.5 のようになるので，荷電粒子の運動の向きがはっきりわかる．このようにして，アンダーソンは正電荷をもつ陽電子を発見した．

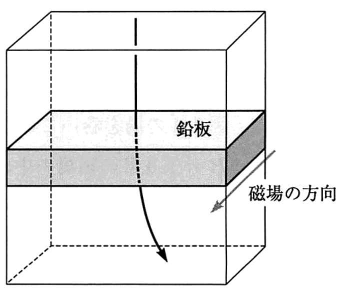


図 3.5　霧箱中の鉛板を通過した荷電粒子の振舞

質量の決め方

運動量のほかに速さが測定されれば，素粒子の質量が決められる．速さの直接的な測定法として，粒子が一定距離を移動するときの時間を測定する飛行時間測定法があるが，間接的な測定法として，荷電粒子が物質中をその物質中での光速 $c_r = c/n$（n は屈折率）よりも速く運動するときに放射するチェレンコフ放射光（図3.6）を測定する**チェレンコフ計数器**の利用や電離損失を利用する方法などがある．

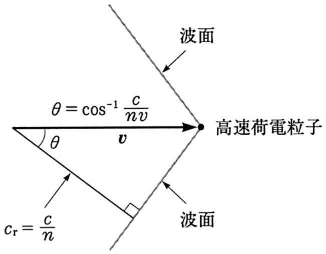


図3.6　チェレンコフ放射の波面

運動量が同じ場合，質量の大きな荷電粒子は速さが遅く，近くの分子と長

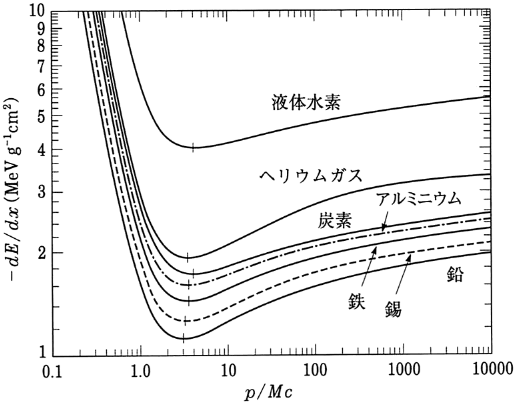


図3.7　液体水素，ヘリウムガス，炭素，アルミニウム，鉄，錫，鉛の中での荷電粒子の運動量 p とエネルギー損失 $-dE/dx$ の関係．$-dE/dx$ を測定して粒子を同定できるのは，図の曲線が右下がりの部分の場合だけである．M は入射粒子の質量である．p [MeV/c] を単位が MeV/c のときの運動量の数値，M [MeV/c^2] を単位が MeV/c^2 のときの質量の数値とすると，横軸 p/Mc の値は p [MeV/c]/M [MeV/c^2] に等しい．縦軸の値については本文を参照．

い間作用し合うので電離作用が大きい．したがって，エネルギー損失が大きく，短距離を移動しただけで停止する．この飛跡の長さを**レンジ**という．すなわち，同じ運動量の場合，質量の大きな荷電粒子のレンジは短く，同じ移動距離当りのエネルギー損失 $-dE/dx$ は大きい．

液体水素，ヘリウムガス，いくつかの固体の中での素粒子の運動量 p とエネルギー損失 $-dE/dx$ の関係を図 3.7 に示した（図の縦軸は $-dE/dx$ を密度で割ったものを示す）．この関係を利用すると，荷電粒子の質量を決められる．

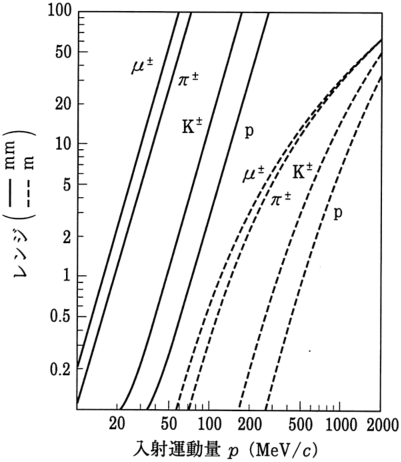


図 3.8　液体水素の中での荷電素粒子のレンジと飛跡の始点での運動量（入射運動量）の関係．（電子のレンジは長く，$p = 10\,\mathrm{MeV}/c$ で約 40 cm.）

図 3.4 の飛跡を残した負電荷の粒子のレンジは，図 3.8 に示した液体水素中のどの素粒子のレンジよりも長いので，ここに示されている素粒子よりも質量が小さい素粒子の電子であると結論される．

§ 3.2　素粒子の加速　— 巨大加速器 —

素粒子の世界を探るには，安定な荷電素粒子を電場で高エネルギーに加速して，

1. これを加速器の外に取り出して標的にぶつける（**固定標的による実験**，図 3.9）

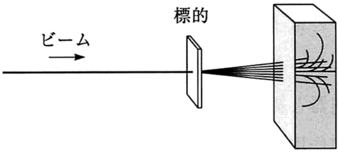


図 3.9 固定標的との衝突実験

2. 2つの高エネルギービームを正面衝突させる（**衝突器による実験**，図 3.10）

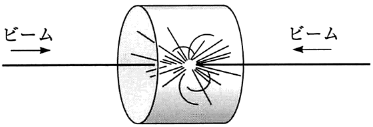


図 3.10 衝突型加速器での衝突実験

の2方式がある．

加速器で高エネルギーの素粒子ビームを作り出さなければならない理由は2つある．第1の理由は，運動量 p をもつ素粒子は波長

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.13 \times 10^{-21}\,\mathrm{MeV \cdot s}}{p\,[\mathrm{MeV}/c]\,\mathrm{MeV}/c} = \frac{1.2 \times 10^{-12}}{p\,[\mathrm{MeV}/c]}\,\mathrm{m} \qquad (3.11)$$

の波の性質をもつが，広がった物体の構造を探るには，その広がりよりも波長の短いビームを当てて調べなければならないからである．調べる対象の広がりを Δx とすると，ド・ブロイ波長 λ が Δx 程度以下のビームを使わなければならない．たとえば，半径が約 10^{-15} m の広がりをもつ核子の構造を探るには，

$$p\,[\mathrm{MeV}/c] = \frac{1.2 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}}{10^{-15}\,\mathrm{m}} \approx 1200$$

つまり，運動量が

$$p \approx 1200\,\mathrm{MeV}/c$$

になるように加速しなければならない．

第２の理由は，質量の大きな新しい素粒子を生成するには，大きなエネルギーをもつ素粒子を衝突させる必要があるからである（§4.3参照）．

電荷をもつ安定な素粒子は，陽子と電子およびその反粒子の反陽子と陽電子の４種類しかない．そこで，高エネルギー加速器は陽子加速器と電子加速器に大別され，形によって円形加速器と線形加速器に分類される．

電場の中では荷電粒子に電気力が作用するので，電場によって荷電粒子を加速できる．荷電粒子を高速になるまで加速する１つの方法は，荷電粒子を磁場の中で円運動させて，電場でくり返し加速することである．このような加速器を**円形加速器**という．

円形加速器

一様な磁場 B の中にある電荷 e の荷電粒子は，(3.3) から，半径が

$$r = \frac{p}{eB} = \frac{mv}{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.12}$$

で，単位時間当りの回転数 f が

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2\pi m} \tag{3.13}$$

の等速円運動を行う．荷電粒子の速さが遅く，$v \ll c$ の場合には，回転数 $f \approx eB/2\pi m$ は速さ v や半径 r には無関係なので，この事実を利用して，イオンを加速するサイクロトロンでは，一様な磁場 B の中でサイクロトロン周波数とよばれる一定の周波数 $f = eB/2\pi m$ の交流電場をかけてイオンを加速する（図3.11）．

しかし，荷電粒子が加速されて $1/\sqrt{1-v^2/c^2} \gtrsim 1.01$ になると，粒子の回転角速度の減少が無視できなくなる．そこで，**シンクロトロン加速器**では，この問題を回避し，電磁石の鉄心用の鉄を節約するために，別の加速器によってあらかじめある程度のエネルギーに加速した荷電粒子を円形の加

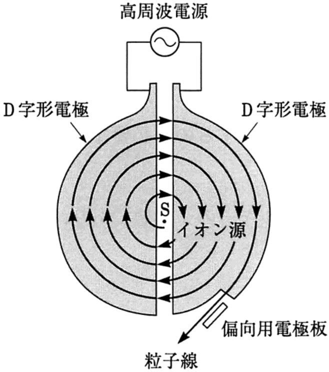


図 3.11 サイクロトロンの中での荷電粒子の運動．一様な磁場に垂直に置かれた 2 つの D 字形電極の間にサイクロトロン周波数の高周波電場をかけると，イオン源から出た原子核は電場で加速され，円運動の半径が大きくなっていく．これを偏向用電極板による電気力によって外部へビームとして取り出す．

速管に入射し，周波数 $f = v/2\pi r$ の交流電場で加速する．r は一定なので，加速に合わせて，交流電場の周波数を大きくし，また，磁場の強さ B が $B = p/er$ になるように強くしていく必要がある．

図 3.12 に示すように，シンクロトロンでは，円周上にたくさんの電磁石を並べ，電磁石の磁極の間に内部を真空にしたパイプを設置する．そして，荷電粒子を真空パイプの中に入射し，パイプの中で円運動させる．荷電粒子は，電磁石の間に設置した高周波加速装置を通過するたびに，だんだん速く

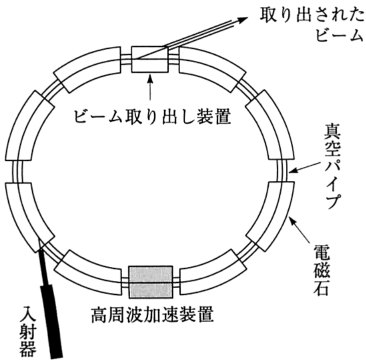


図 3.12 円形加速器シンクロトロンの概念図

なる.

加速された荷電粒子は，取り出されて実験に使われる．荷電粒子の円運動の半径が大きいほど，高いエネルギーの荷電粒子が得られる．前節で導いた (3.8) を使うと，粒子を目的のエネルギーまで加速するのに必要なシンクロトロンの半径を計算できる.

次章で学ぶ相対性理論によれば，質量はエネルギーの一形態であり，質量が m の粒子は，運動量が p のときにエネルギー

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{3.14}$$

をもつ．したがって，光速 c に近い速さで運動する粒子のエネルギー $E \fallingdotseq pc + (mc^2)^2/2pc \fallingdotseq pc$ を MeV を単位にして測定した数値 $E\,[\mathrm{MeV}]$ は,

$$\begin{aligned} E\,[\mathrm{MeV}]\ \mathrm{MeV} &\fallingdotseq p\,[\mathrm{MeV}/c]\,(\mathrm{MeV}/c)\cdot c \\ &= p\,[\mathrm{MeV}/c]\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{3.15}$$

である（$E = E\,[\mathrm{MeV}]\ \mathrm{MeV}$，$p = p\,[\mathrm{MeV}/c]\mathrm{MeV}/c$ であることに注意)．そこで，エネルギーの大きさが $E\,[\mathrm{MeV}]$ で電荷の大きさが e の荷電粒子が一様な磁場 B の中で光速に近い速さの等速円運動をする場合の半径 r は，(3.8) を利用すると,

$$r = \frac{E\,[\mathrm{MeV}]}{300B\,[\mathrm{T}]}\,\mathrm{m} \tag{3.16}$$

である．この式を

$$r = \frac{E\,[\mathrm{GeV}]}{0.3B\,[\mathrm{T}]}\,\mathrm{m}, \qquad r = \frac{E\,[\mathrm{TeV}]}{0.3B\,[\mathrm{T}]}\,\mathrm{km} \tag{3.17}$$

と書き直すこともできる.

(3.17) から，荷電素粒子を超高エネルギーに加速する円形加速器の半径 r は巨大になることがわかる．現在，世界最高の陽子加速器である米国のフェルミ国立加速器研究所 FNAL の**テバトロン**（**TEVATRON**）(図 3.13) では，ピーク値が $B = 4.4$ T の磁場中の半径 $r = 1$ km の加速管の中で，陽子および反陽子をエネルギー E が 1.0 TeV（テラ電子ボルト）になるま

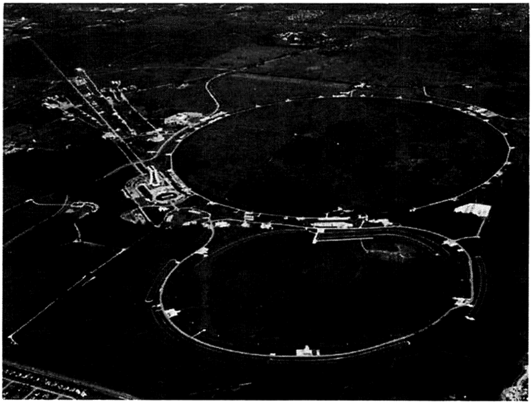


図 3.13 米国のフェルミ国立加速器研究所．上の環状道路の地下に，半径 1 km の陽子‐反陽子衝突型加速器テバトロンが設置され，下の環状道路の地下には，陽子と反陽子の前段加速器が設置されている．（フェルミ国立加速器研究所 提供）

で加速できる．E，r，Bの数値を（3.17）の第 2 式に代入してみると，左辺は 1 km，右辺は 0.76 km で，左右両辺が一致しない．その理由は，加速管の一部には，ビームの入射・加速・取り出し等のために磁石が置いてない場所があるからである．

衝突器（加速型衝突器）

より高いエネルギーでの素粒子反応を引き起こすためには，加速された素粒子ビームを静止している素粒子に衝突させるより，荷電素粒子の 2 つのビームを高エネルギーになるまで加速して，互いに正面衝突させる方が有効である．おのおののエネルギーが 1 TeV の 2 つの陽子ビーム，あるいは陽子ビームと反陽子ビームを正面衝突させる場合には，衝突する 2 粒子の重心エネルギーは 2 TeV である．これに対して，静止している陽子に 1 TeV の陽子を衝突させる場合には，2 陽子の重心エネルギーは 43 GeV = 0.043 TeV にすぎない（第 4 章の演習問題［5］参照）．そこで，最近は 2 つのビームを正面衝突させる衝突型加速器が主に作られている（図 3.14）．テバトロン

は，1.0 TeV の陽子と 1.0 TeV の反陽子の衝突型加速器としても使われている．

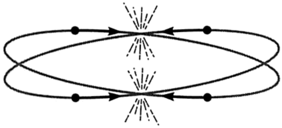


図 3.14　2 つのビームの衝突

2006 年に完成予定のヨーロッパ原子核研究所 CERN の LHC(Large Hadron Collider) では，ピーク値が $B = 8.3$ T の磁場の中の 1 周 26.66 km の加速管の中で，陽子と陽子をそれぞれのエネルギーが 7.0 TeV になるまで加速して，正面衝突させる予定である．

電子の円形加速器

ここまで記してきたことは，電子の円形加速器についても成り立つ．しかし，質量が陽子の質量の 1/1840 しかない電子には，別の事情がある．それは，放射光によるエネルギー損失である．荷電粒子が高速で円運動するときには光を放射する．これを**放射光**という．速さ v，エネルギー E で，半径 r の円運動を行っている質量 m，電荷 e の荷電粒子が放射光として単位時間当りに失うエネルギー P は

$$P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2v^4}{c^3r^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \tag{3.18}$$

である．この式の分母の m^4 という因子のために，質量の小さな電子の放射光によるエネルギー損失は著しく大きい．電子のエネルギー Eを E [GeV] GeV，加速管の曲率半径 r を r [km] km と記す場合，$v \approx c$ の電子が円軌道を 1 回転するたびに失うエネルギー W は

$$W = 8.85 \times 10^{-5}\,\frac{E\,[\mathrm{GeV}]^4}{r\,[\mathrm{km}]}\ \mathrm{MeV} \tag{3.19}$$

である．したがって，同じ半径の円形加速器でも，電子を加速できる最高のエネルギーは陽子に比べるとはるかに低い．

上に記した CERN の陽子 - 反陽子衝突型加速器 LHC は，電子 - 陽電子衝突型加速器 LEP のために作られたトンネルに建設されているので，加速

管の半径は同じであるが，LEP ではピーク値が $B = 0.135$ T の磁場の中で，電子と陽電子を最高で 92 GeV に加速していた．

異なったタイプの円形の衝突型加速器として，ドイツ電子シンクロトロン研究所 DESY の，30 GeV の電子と 820 GeV の陽子を衝突させる**ヘラ**（**HERA**）がある．

線形加速器（リニアック）

線形加速器は，まっすぐな加速管の中に加速電極をたくさん並べて，荷電粒子と同じ速さで進む電磁波（マイクロ波）によって荷電粒子を加速する装置である（図 3.15）．荷電粒子の速さは電磁波の速さより遅い．そこで，加速管の中に取り付けた円板型の導体で，マイクロ波をいわば遠回りして伝えることによって，マイクロ波が加速管の中を伝わる速さを真空中の光速より遅くしている．加速の原理は波乗り（サーフィン）の原理と同じで，荷電粒子が波の山の前側の斜面に乗っていれば，どんどん加速される．高いエネルギーに加速するためには，加速管が長く，加速電極の数が多いほどよい．線形加速器は，シンクロトロンへの入射用加速器としても使われている．

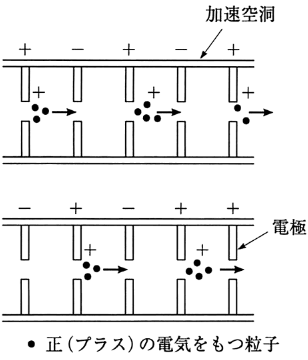


図 3.15　線形加速器の概念図

§3.3　衝突断面積とルミノシティ

素粒子の性質や構造を知るには，2つの素粒子を衝突させて調べる．

2つの素粒子の衝突しやすさを表す量として，衝突断面積がある．まず，静止している標的粒子Bからなる薄い板に粒子Aのビームが垂直に入射する，固定標的型実験を考える．標的板の粒子数密度を n，厚さを d とすると，入射粒子が見る標的板の単位面積当りの粒子数は nd である．そこで，粒子Aが標的板を素通りせず，板の中で粒子Bの1個と衝突する確率を P とし，

$$\sigma_t(\mathrm{AB}) = \frac{P}{nd} \tag{3.20}$$

という量を考え，これを粒子Aと粒子Bの**衝突断面積**あるいは**全断面積**という．このようによばれる理由は，粒子Aが見る粒子Bの断面積が σ_t なら，衝突確率 P は $P = \sigma_t nd$ と表されるからである(図3.16)．

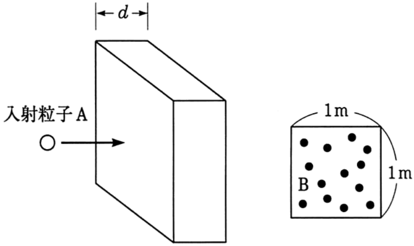


図3.16　標的板の単位面積当り $\sigma_t nd$ が粒子Bによってふさがれている．

衝突断面積の次元は(長さ)^2 なので，国際単位は $\mathrm{m^2}$ であるが，これは大きすぎるので，$10^{-28}\,\mathrm{m^2}$ を1バーン（記号b）とよび，それに接頭語を付けた，

$1\,\mathrm{mb} = 10^{-31}\,\mathrm{m^2}$,　$1\,\mu\mathrm{b} = 10^{-34}\,\mathrm{m^2}$,　$1\,\mathrm{nb} = 10^{-37}\,\mathrm{m^2}$,　$1\,\mathrm{pb} = 10^{-40}\,\mathrm{m^2}$

などを使う．

静止している核子にエネルギーが1～1000 GeVの核子が衝突する場合の全断面積は約40 mb である．この全断面積 $40\,\mathrm{mb} = 4\times10^{-30}\,\mathrm{m^2}$ を πr^2 とおくと，核子の広がり r は約 $10^{-15}\,\mathrm{m}$ になる．

平均自由行程

標的が厚い場合，入射粒子が衝突によって散乱されたり，別の粒子に変ったりしていき，ビーム強度 $N(x)$ は減衰していく．入射粒子が距離 dx 進む間に衝突する確率は $\sigma_{\mathrm{t}} n\, dx$ なので，ビーム強度 $N(x)$ は

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = -\sigma_{\mathrm{t}} n\, dx$$

つまり，

$$\frac{dN}{dx} = -\sigma_{\mathrm{t}} nN \tag{3.21}$$

という微分方程式に従う．(3.21) の解は

$$N(x) = N(0)\, e^{-\sigma_{\mathrm{t}} nx} \tag{3.22}$$

である．

入射粒子が標的物質に入射してから標的粒子と最初に衝突するまでの平均移動距離 l を**平均自由行程**という．(3.21) から

$$l = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{t}} n} \tag{3.23}$$

であることが導かれる（演習問題［2］参照）．

ルミノシティ

粒子 A のビームと粒子 B のビームの衝突型加速器で単位時間当りに粒子 A，B の衝突が起こる回数 R は，全断面積 σ_{t} とルミノシティとよばれる定数 L の積

$$R = L\sigma_{\mathrm{t}} \tag{3.24}$$

で与えられる．2 つのビームの粒子群（バンチ）がそれぞれ 1 つの場合，その粒子数を n_1，n_2，進行方向に垂直な方向へのビームの広がりの標準偏差を σ_x，σ_y，ビームが加速管を回る単位時間当りの回転数（1 つの衝突点で 2 つのバンチが単位時間に出会う回数）を f とすると，ルミノシティ L は

$$L = f\frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \tag{3.25}$$

と表せる（演習問題［4］参照）．

演習問題

［**1**］（1） 負電荷のK中間子であるK^-が液体水素に入射した場合を考える．K^-中間子が静止している陽子p^+と反応して，

$K^- + p^+ \rightarrow K^- + p^+$,　$K^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0$,　$K^- + p^+ \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$,

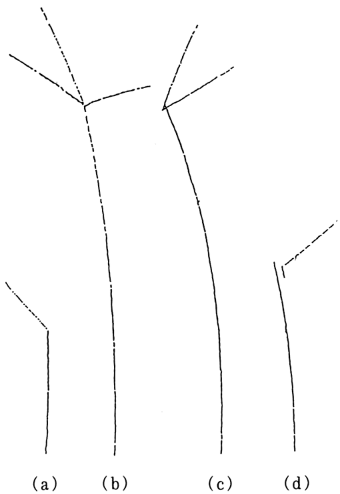
$K^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$,　$K^- + p^+ \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$

のような反応を起こした場合と，液体水素の中で

$$K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0, \quad K^- \rightarrow \pi^- + \pi^- + \pi^+$$

のような崩壊を行った場合では，写真に写った荷電粒子の飛跡の本数にどのような違いが生じるか（各記号の名前については付録A参照）．

（2） 図に，負電荷のK中間子であるK^-が液体水素の中で起こした現象を



(a)　(b)　(c)　(d)

示す．(a) は $K^- \to \pi^- + \pi^0$，(b) は $K^- \to \pi^- + \pi^- + \pi^+$，(c) は $K^- + p^+ \to \pi^+ + \Sigma^-$，$\Sigma^- \to \pi^- + n^0$，(d) は $K^- + p^+ \to \pi^0 + \Lambda^0$，$\Lambda^0 \to \pi^- + p^+$ の飛跡であることを説明せよ．

[**2**] 平均自由行程に対する (3.23) を導け．

[**3**] 液体水素の中で，陽子が一度水素原子核に衝突してから次の水素原子核に衝突するまでに走る平均距離 l は約 6 m であることを示せ．ただし，液体水素の比重は 0.071，アボガドロ定数は 6.0×10^{23}/mol，陽子の広がりは約 10^{-15} m (入射粒子が見る陽子の断面積 σ_t は約 $4\times10^{-30}\,\mathrm{m}^2$) である．(ヒント：まず，水素原子核の数密度 n を求めよ．)

[**4**] 進行方向に垂直な方向へのビーム強度の分布が正規分布でなく，断面積 S の中で一様だとすると，ルミノシティ L は，(3.25) ではなく，

$$L = f\frac{n_1 n_2}{S}$$

となることを示せ．

陽電子を発見したアンダーソン博士

§3.1で紹介したように，カリフォルニア工科大学の27歳の研究員であったアンダーソン博士（1905 - 1991）は，霧箱の中に1枚の鉛板を入れることによって，正電荷を帯びた陽電子を発見した（図3.5参照）．陽電子の発見のニュースを聞いた世界各地の研究者たちが，自分たちの写した霧箱写真を引っ張り出して見たところ，自分たちも陽電子を撮影していたことを知り，残念がったということである．日本でもアンダーソン博士の発見以前に，陽電子を写していたという話である．1枚の鉛板を入れるか入れないかが，大きな違いを生んだのである．

私が大学院を修了した翌年，渡米して研究員になったカリフォルニア工科大学の当時の物理学科長がアンダーソン博士であった．大学に初めて出勤した日に挨拶に行ったところ，「何か困ったことはありませんか」とお尋ねになったので，「どのような車を買おうか迷っています」と答えたところ，「中古車は安いが当たりはずれがある．新車は確実だが値段が高い．よく考えて自分で決めなさい．」とのお答えであった．そこで，一番安い車種の新車を購入した．

そのすぐ後にオメガ・マイナス（Ω^-）という粒子が発見された（第8章の演習問題［4］参照）．お茶の時間に，「新しい粒子は1つ見つかると，2つ目以降は次々に見つかるものです」と私に話されたことが昨日のように思い出される．

4 相対性理論

この章では，素粒子物理学の基礎を理解するのに必要な特殊相対性理論を簡単に説明する．

特殊相対性理論とは，1905 年にアインシュタインが提唱した理論で，アインシュタインの相対性原理とよばれる次の 2 条件，

(1) ある慣性系に対して一定の速度で運動する座標系は慣性系である．したがって，2 つの慣性系では同じ形の運動法則が成り立つ．

(2) すべての慣性系で，光の速さはその進行方向によらず一定である．

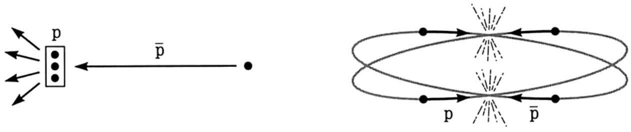
を基本原理とする理論である．

アインシュタインの相対性原理から，光速に近い速さで運動している不安定な粒子の寿命は静止している場合に比べて長くなること，質量はエネルギーの一形態であることなどが導かれるが，これらは素粒子実験で確かめられている．

§4.1 ローレンツ変換

反陽子と陽子の衝突実験には，実験室の台上に固定した容器の中の液体水素に加速器からの反陽子ビームを入射する固定標的実験（図 4.1(a)）と，ほぼ水平に交わる 2 つの真空パイプの中を反対向きに運動している反陽子ビームと陽子ビームを衝突させる衝突器実験（図(b)）がある．この 2 つの実験結果にはどのような関係があるのだろうか．

図 (b) の衝突点付近での陽子ビームと同じ速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する座標系 O′-$x'y'z'$ に対して静止している観測者 S′ が反陽子と陽子の衝突を眺めれば，



(a)　　　　(b)

図 4.1　(a)　反陽子ビームと静止している水素標的の衝突
(b)　反陽子ビームと陽子ビームの衝突

衝突直前の陽子は静止しているので，図 (a) の実験室に固定された座標系 O - xyz に対して静止している観測者 S が眺める反陽子と陽子の衝突のように見えるはずである．つまり，図 4.1 の実験結果は 1 つの実験を 2 つの座標系で観測した結果に対応している．

図 4.2 のように，x 軸方向に一定の速度 $\boldsymbol{u}$ の相対運動をしている 2 つの座標系，S 系と S′ 系での座標の間には，ニュートン力学では，

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{4.1}$$

という関係がある．日常生活の体験で，2 つの座標系での時間の測定に共通の時計を使えると考えるので，$t' = t$ とおくのである．この S 系から S′ 系への変換を**ガリレイ変換**という．なお，2 つの座標系の原点 O と O′ が一致する時刻を $t = t' = 0$ になるようにした．

(4.1) から，2 つの座標系での物体の速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と $\boldsymbol{v}' = (v_x{}', v_y{}', v_z{}')$ の関係，

$$v_x{}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - ut) = v_x - u, \quad v_y{}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = v_y, \quad v_z{}' = v_z \tag{4.2}$$

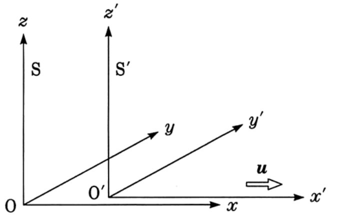


図 4.2　2 つの座標系 S 系（O-xyz 系）と S′ 系（O′-$x'y'z'$ 系）．S′ 系は S 系に対して x 方向に一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で等速直線運動している．

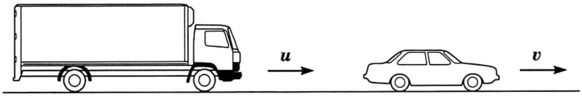


図 4.3　速度 $\boldsymbol{u}$ で走っているトラックの運転手には，速度 $\boldsymbol{v}$ で走っている自動車の速度（相対速度）$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ に見える．

つまり，$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ が導かれる（図 4.3）．

しかし，この速度の関係を光の速度に適用すると，光速度一定の原理に反する．(4.1)，(4.2) は，日常生活で体験する現象では成り立つが，光や光のように速く動く物体の場合には成り立たない．時間は空間に無関係に流れるのではなく，つまり $t' = t$ ではなく，時間と空間は互いに関係し合っている．このような場合にはガリレイ変換 (4.1) ではなく，**ローレンツ変換**とよばれる，4 次元時空間での変換，

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{4.3}$$

が成り立つ（速度の変換則については演習問題 [1] を参照）．

ローレンツ変換 (4.3) では

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \tag{4.4}$$

という関係が常に成り立つので，

$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ は，ローレンツ変換で一定に保たれる不変量　(4.5)

である．

2 つの座標系の原点が一致する時刻 $t = t' = 0$ に原点で発射された光のパルスを，S 系で時刻 t に点 (x, y, z) で観測したとする．この現象を S′ 系で時刻 t' に点 (x', y', z') で観測したとすると，この 2 つの時空点は (4.4)

を満たす．この事実は，2つの座標系の両方で，光の波面はすべての方向に一定の速さ c で伝わることを意味している．

なお，ガリレイ変換（4.1）で不変に保たれる量は，同時刻での2点間の距離 $x^2+y^2+z^2$ である．

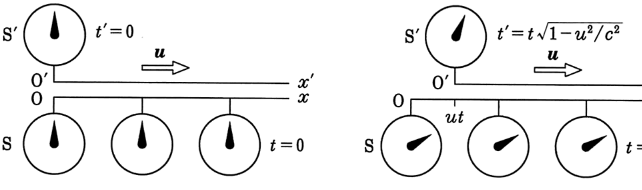
ローレンツ変換（4.3）は，ニュートン力学での変換則（4.1）とは異なる．しかし，$u \ll c$ のときには近似的に一致する．したがって，速さ u が光速よりもはるかに小さな場合には，ニュートン力学を適用できることがわかる．

光速が一定だという原理は，我々の日常生活の常識とは違う．そこで，相対性理論では，高速で動いている時計はゆっくり進むように見えたり，高速で動いている棒は短く見えたりするなどという，日常生活では出会わないことが予言される．

動いている時計の遅れ

光速が一定というアインシュタインの相対性原理から，「動いている時計は静止している時計に比べてゆっくり進む」ということが導かれる．

ある座標系（S系）の x 軸上，たとえばまっすぐな線路に沿って多くの時計を並べる（図4.4）．S系の観測者には，これらの時計がすべて同じ時刻 t を示しているように調整しておく．S系に対して，$+x$ 方向に一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で等速直線運動している座標系（S′系）の原点O′，たとえば高速運転中の電車の窓際に時計が固定してあり，時刻 t' を示しているとする．そし



(a) $t=0,\ t'=0$　　(b) $t=t,\ t'=t\sqrt{1-u^2/c^2}$

図4.4　動いている時計の遅れ

て，2つの座標系の原点OとO′が一致したとき，S系のすべての時計は $t=0$ を示し，S′系の原点O′にある時計も $t'=0$ を示すように時計を合わせておく（図(a)）．そうすると，S系での t 秒後にS′系の原点O′は距離 ut だけ動くので，$x=ut$ にある（図(b)）．このとき，S′系の原点O′にある時計は，時刻

$$t' = \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{t - \dfrac{u^2 t}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

つまり，

$$t' = t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{4.6}$$

を示すので，

動いている1つの時計を地上の2箇所にある2つの時計と比べると，動いている時計の進み方（t'）は静止している時計の進み方（t）より遅く，その $\sqrt{1-u^2/c^2}$ 倍である．

固有時

運動している物体に固定されている時計の刻む時刻をその物体の**固有時**とよび，τ と記す．ある慣性系に対して速さ u で動いている物体の固有時の進み方は，上で示したように，その慣性系に静止している時計の進み方の $\sqrt{1-u^2/c^2}$ 倍である．

運動している時計はゆっくり進むという相対性理論の結論は実験で検証されている．

不安定な原子核や素粒子は，自分自身に固定された時計（固有時）で測ったとき，一定の平均寿命で崩壊する．たとえば，ミュー粒子の平均寿命は，静止している場合は 2.2×10^{-6} 秒である．これに対して，速さ u で運動し

ている場合の平均寿命は，静止している場合の $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ 倍に延びることが実験で確かめられている．

例 1．日本の高エネルギー加速器研究機構 KEK の電子 - 陽電子衝突型加速器 KEKB は，不安定なウプシロン中間子 $\Upsilon(4\,\mathrm{S})$ を生成させ，その崩壊で生じる B 中間子の崩壊における CP 不変性の破れの検証を主目的に建設された（§9.4 参照）．ウプシロン中間子を静止状態ではなく運動状態で生成し，長い飛跡を描かせるために電子ビームのエネルギーを 8 GeV，陽電子ビームのエネルギーを 3.5 GeV と非対称にしている．同目的で作られた，米国のスタンフォード線形加速器研究所 SLAC の PEP - II でも，ビームのエネルギーを非対称にしている．

動いている棒の縮み（ローレンツ収縮）

速さ u で高速運転している電車の運転手の時計を地表で見ると，地表の距離 L_0 の 2 点間を通過する間に，L_0/u ではなく $L_0\sqrt{1-u^2/c^2}/u$ の時間を刻むように見える．したがって，電車の運転手には，地表上の 2 点間の距離（= 速さ × 通過時間）は L_0 ではなく，$L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$ に縮んで見える．つまり，ある慣性系に静止している場合に長さが L_0 の棒を，棒の方向に速さ u で等速直線運動している観測者が測定した場合の測定値 L は，L_0 の $\sqrt{1-u^2/c^2}$ 倍，

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{4.7}$$

になり，静止している場合の長さ L_0 に比べて，運動方向に縮んで見える．これを**ローレンツ収縮**という．

これに対して，$y = y'$，$z = z'$ なので，運動している物体の運動方向に垂直な方向の長さは，静止している場合と同じ長さに見える．したがって，

素粒子の進行方向に垂直な衝突断面積の大きさは，入射ビーム方向のローレンツ変換で不変である．

§4.2　相対論的力学

ニュートン力学では，外力が作用せず，作用・反作用の法則に従う内力のみがはたらく質点系の運動量は保存する．電磁気力には作用・反作用の法則に従わない力があるが，電磁場の運動量を考慮すると，古典物理学では孤立した系の運動量は保存する．古典物理学ばかりでなく，量子力学でも，相対論的力学でも，エネルギー保存則と運動量保存則は成り立つ．この2つの保存則は自然界の基本法則である．

相対論的力学では，質量が m，速度が $\boldsymbol{u}$ の質点の運動量 $\boldsymbol{p}$ を，$m\boldsymbol{u}$ ではなく，

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{4.8}$$

と定義すれば，運動量保存則が成り立つことを示せる．また，エネルギー E を

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{4.9}$$

と定義し，運動の法則を

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{4.10}$$

と定義すれば，質点に外力が作用すると，外力が行う仕事の分だけ物体のエネルギーが増加するという，仕事とエネルギーの関係が成り立つ（演習問題［3］参照）．

物体の速さ u が光速 c に比べてはるかに遅く，ニュートン力学が成り立つ場合には，物体のエネルギーを表す式 (4.9) は

$$E \fallingdotseq mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 \tag{4.11}$$

となる．右辺の第 2 項の $mu^2/2$ は，ニュートン力学での運動エネルギーである．そして，静止している物体のエネルギーと解釈される右辺第 1 項の mc^2 を**静止エネルギー**という．

§4.3　4 元ベクトル

ある粒子のエネルギーと運動量を慣性系 S で測定したら E と $\boldsymbol{p}$ であったとし，慣性系 S に対して $+x$ 方向に速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している別の慣性系 S′ で測定したら E' と $\boldsymbol{p}'$ であったとすると，

$$p_x' = \frac{p_x - \dfrac{uE}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z, \quad E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{4.12}$$

という関係を満たすことを証明できる．2 つの変換（4.3）と（4.12）を比べると，$(E/c, \boldsymbol{p})$ は $(ct, \boldsymbol{r})$ と同じ変換，つまりローレンツ変換に従うことがわかる．

したがって，（4.4）が成り立つ**ローレンツ変換で $\boldsymbol{E^2 - (pc)^2}$ は不変**，つまり，

$$E^2 - (pc)^2 = E'^2 - (p'c)^2 \tag{4.13}$$

である．特に慣性系 S′ がこの粒子と一緒に運動している場合には，$p' = 0$，$E' = mc^2$ なので，（4.13）は

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \tag{4.14}$$

となる．したがって，高速の自由粒子のエネルギー E は

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{4.15}$$

と表される．（4.15）は，相対性理論でのエネルギー $E = mc^2/\sqrt{1-u^2/c^2}$ と運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}/\sqrt{1-u^2/c^2}$ から $\boldsymbol{u}$ を消去しても求められる．

例1.　衝突器での実験と固定標的実験　粒子（質量 m）とその反粒子の衝突型加速器で，粒子と反粒子のビームのエネルギーがそれぞれ E_{C} になるまで加速し，2つのビームが正面衝突して（図4.5(a)），粒子と反粒子のペアが消滅し，1つの新しい粒子（質量 M）が生成するという現象が起こるための必要条件は，

$$2E_{\mathrm{C}} > Mc^2, \qquad \text{つまり}, \qquad E_{\mathrm{C}} > \frac{1}{2}Mc^2 \tag{4.16}$$

である．

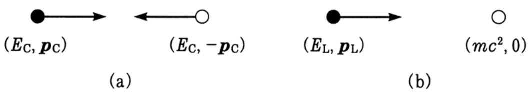


図4.5　(a)　重心系（衝突型加速器実験）
(b)　実験室系（固定標的実験）

この現象を，静止している粒子 $(E, \boldsymbol{p}) = (mc^2, 0)$ にその反粒子 $(E, \boldsymbol{p}) = (E_{\mathrm{L}} = \sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (mc^2)^2},\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{L}})$ のビームを当てて起こさせる場合には(図(b))，2粒子系の運動量 $\boldsymbol{p}'$ とエネルギー E' は

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_{\mathrm{L}}, \qquad E' = \sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (mc^2)^2} + mc^2 \tag{4.17}$$

である．また，運動量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{L}}$ をもつ質量 M の新粒子のエネルギーは $\sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (Mc^2)^2}$ なので，新粒子が発生するための必要条件は，

$$\sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (mc^2)^2} + mc^2 > \sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (Mc^2)^2} \tag{4.18}$$

である．この式の両辺を2乗して整理すると，入射粒子のエネルギー $E_{\mathrm{L}} = \sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (mc^2)^2}$ に対する条件

$$E_{\mathrm{L}} = \sqrt{(p_{\mathrm{L}}c)^2 + (mc^2)^2} > \frac{M}{2m}Mc^2 - mc^2 \tag{4.19}$$

が導かれる．

同じビームエネルギーでの衝突型加速器実験と固定標的実験では，生成できる新粒子の質量の比が

$$\sim \frac{M}{m} \qquad (M \gg m \text{ の場合}) \tag{4.20}$$

であることが（4.16）と（4.19）を比べるとわかる．このことから，大きな質量の粒子の生成に対して衝突型加速器が有効であることがわかる．

4元ベクトル

エネルギーと運動量 $(E/c, \boldsymbol{p})$ のように，時刻と位置 $(ct, \boldsymbol{r})$ と同じローレンツ変換に従う4成分から成る量を**4元ベクトル**という．たとえば，

電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ ：　$(c\rho, \boldsymbol{j})$

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ ：　$\left(\dfrac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$

時間微分と空間微分 ：　$\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

などは4元ベクトルである．ただし，∇ でなく，$-\nabla$ であることに注意すること（演習問題［6］参照）．

4元ベクトル $(a_0, \boldsymbol{a}) = (a_0, a_x, a_y, a_z)$ の表し方として，反変ベクトル表示 $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ と共変ベクトル表示 $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ がある．ここで，

$$a^0 = a_0, \quad a^1 = a_x, \quad a^2 = a_y, \quad a^3 = a_z \tag{4.21 a}$$

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = -a_x, \quad a_2 = -a_y, \quad a_3 = -a_z \tag{4.21 b}$$

である．したがって，この表示法を使うと，

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{4.22}$$

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{4.23 a}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{4.23 b}$$

である．

2つの4元ベクトルを（a_0, $\boldsymbol{a}$），（b_0, $\boldsymbol{b}$）とすると，

$$a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{4.24}$$

は，ローレンツ変換で不変な量である．反変ベクトルと共変ベクトルを使うと，(4.24) は

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a_0 b_0 - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$
$$= a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{4.25}$$

と表される．

演習問題

［1］　ローレンツ変換 (4.3) からS系での速度 $\boldsymbol{v}$ とS′系での速度 $\boldsymbol{v}'$ の関係,

$$v_x{}' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \qquad v_y{}' = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} v_y, \qquad v_z{}' = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} v_z$$

を導け．

［2］　ある慣性系で観測した場合に光速で運動している物体は，ほかの慣性系で観測しても光速で運動することを，［1］で導いた相対論的な速度の合成則を使って証明せよ．

［3］　質点に外力 $\boldsymbol{F}$ が作用すると，外力が行う仕事 $dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ だけ物体のエネルギー E が増加するという，仕事とエネルギーの関係 $dW = dE$ を使って，エネルギーの式 (4.9) を導け．

［4］　高エネルギー加速器研究機構の電子 - 陽電子衝突型加速器KEKBで加速された電子（エネルギー E_-）と陽電子（エネルギー E_+）の重心系での全エネルギー W はいくらか．

［5］　静止している陽子に陽子加速器からの陽子を衝突させて，反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ を，

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \ \rightarrow \ \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$$

という反応で作りたい．入射陽子に加速器が与えなければならない最小のエネルギーを求めよ．反陽子とは，陽子と同じ質量をもち，電荷 $-e$ をもつ粒子である．

［**6**］ ローレンツ変換では，時間微分と空間微分 $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$ が $(ct, \boldsymbol{r})$ と同じように変換する 4 元ベクトル，つまり反変ベクトルであることを証明せよ．

『ご冗談でしょう，ファインマンさん』

§8.6に登場するファインマン博士（1918 - 1988）は社会の通念にとらわれない，自由で，型破りな人物であった．ファインマンさんの人柄や，愉快で痛快な思い出話は，『ご冗談でしょう，ファインマンさん』，『困ります，ファインマンさん』（岩波書店）にまとめられている．『困ります，ファインマンさん』の原題は『他人がどう思おうとかまわない』であるが，まさにそのように考えて行動し，物理学を研究してきた人物であった．

私にとって忘れられない思い出は，1967年に米国のロチェスターで開かれた国際会議のときの出来事である．国際会議にはバンケット（晩餐会）がある．正面にメインテーブルがあって，湯川博士はそこに座っておられ，京都なまりの英語でユーモアのあるスピーチをされた．

私はそこからかなり離れた席に座ったが，横を見ると，なぜか隣にはファインマン博士が座っておられた．「あなたの席はあそこではないのですか」とメインテーブルを指すと，「あそこに座ると，隣の着飾った女性と退屈な会話をしなければならないし，そもそもネクタイも上着も付けていない男があそこに座るのは主催者に失礼でしょう」との返事．確かに，私の記憶に残るファインマン博士は，いつも一番上のボタンをはずした白いワイシャツ姿で，上着もネクタイもしていなかった．

晩餐会が終わって，（学期中は学生の寄宿舎である）宿舎に戻る道で，2人とも翌日の午前に同じ飛行機に乗ることがわかり，「早く起きた方が午前7時に相手の部屋に行って起こそう」とファインマン博士が提案された．ほかの大先生だと考えられないことである．翌朝，私は早く起きて着替え，7時になったら起こしに行こうと待ち構えていたが，7時5分前頃に私の部屋のドアがノックされ，外で「ドクター・ハラ，ウェイク・アップ」というファインマン博士の声がした．仕方なしに，私はわざと眠そうな声で「サンキュー」と答えた．私は天下のファインマン博士に起こして頂いた，おそらくただ一人の日本人になるという光栄に浴したのであった．

5 核力とパイ中間子

核子の間にはたらく核力は中間子（メソン）の仲立ちによって生じる力である．この章では，素粒子の間にはたらく力は，素粒子の仲立ちによって生じるという，1935 年に湯川秀樹によって提唱されたアイディアを紹介する．

§5.1 力の場と粒子 ― 核力の中間子論 ―

核 力

核子の間に作用して，核子を結び付けて原子核を構成する力を**核力**という．核力は電気力ではない．電荷を帯びていない中性子に電気力ははたらかないし，陽子の間にはたらく電気力は反発力だからである．核力は万有引力でもない．陽子の間にはたらく万有引力の強さは，反発力である電気力の約 $1/10^{36}$ にすぎないからである（演習問題［1］参照）．

原子核の内部での核子間のような短距離では，核力は陽子の間にはたらくクーロン反発力よりもはるかに強い引力でなければならない．陽子と陽子の衝突は，陽子間距離が約 2×10^{-15} m 以上ではクーロン反発力による散乱として説明されるので，核力は到達距離が約 2×10^{-15} m という極めて短距離の力である．核子間距離が 5×10^{-16} m 以下では，核力は強い反発力である．

これまで，力という言葉を使ってきたが，非相対論的な核子の従う運動方

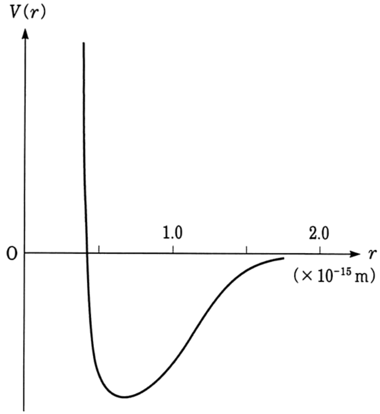


図 5.1 核力ポテンシャル $V(r)$ のおおよその形

程式は，力が現れるニュートンの運動方程式ではなく，力の位置エネルギーが登場するシュレーディンガー方程式である．そこで，図 5.1 には**核力ポテンシャル**とよばれる，核力による位置エネルギーを示した．

2 個の核子に対するシュレーディンガー方程式は，ニュートンの運動方程式の場合と同じように，重心運動と相対運動に分離できる．相対運動に対するシュレーディンガー方程式は，核力ポテンシャルの中での 1 体問題の方程式なので扱いやすい．

電気力と電場と光子

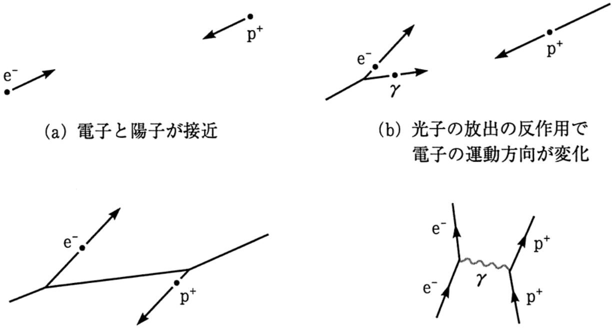
2 つの電荷の間にはたらく電気力は，離れている 2 つの電荷が直接に作用し合う力ではない．電荷はその周囲に電場を作り，電場が第 2 の電荷に電気力を作用するのである．つまり，電気力は電場 $\boldsymbol{E}$ という力の場によって仲立ちされる．電気力の場である電場は，マクスウェルの法則という運動法則に従い，エネルギーと運動量をもつ物理的実体である．

ただし，シュレーディンガー方程式に現れる電磁場は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ ではなく，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5.1}$$

によって定義されるスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ なので，量子力学での基本的な電磁場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ ではなく，$\phi(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ である．

電磁場が時間的に変化しない場合には，時間と共に変化しないスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は，静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ で関係する，電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ に等しい．スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ は電荷 q をもつ荷電粒子のシュレーディンガー方程式に，$q\phi(\boldsymbol{r}, t)$ という形で現れる．



(a) 電子と陽子が接近

(b) 光子の放出の反作用で電子の運動方向が変化

(c) 陽子は光子を吸収して運動方向が変化

(d) (a)～(c) の過程を表す図（ファインマン図）

図 5.2　電子と陽子の光子の交換による散乱（実際の光子ではなく，仮想的な光子である）．

さて，量子の世界には波動と粒子の二重性がある．電磁場の振動の伝播である電磁波は，エネルギーと運動量を運ぶ．一方，光子もエネルギーと運動量を運ぶので，粒子像では，荷電粒子による光子の放出と吸収を通じて荷電粒子間でエネルギーと運動量の交換が行われるとみる（図 5.2）．これを，「2 つの荷電粒子は光子の交換によって相互作用を行う」と表現する．この見方を核力に応用したのが，湯川の核力の中間子論である．

核力を媒介する素粒子のパイ中間子

1935 年に湯川秀樹は，到達距離が短いという核力の特徴が，当時は未知

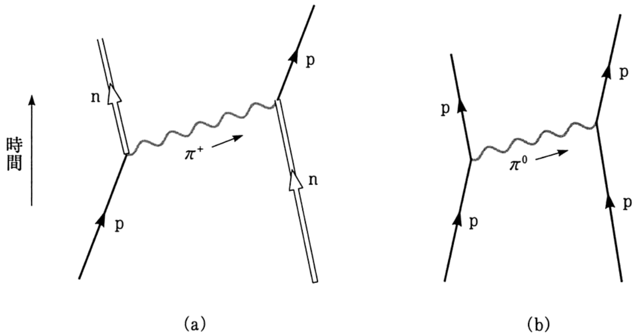


図 5.3　核力はパイ中間子の交換によって生じる．

の素粒子であったパイ中間子の交換によって生じるという，**核力の中間子論**を提唱すると共に，新しい素粒子である**パイ中間子**の存在を予言した．湯川理論では，図 5.3(a) に示すように，陽子 p^+ が正電荷を帯びているパイ中間子（記号 π^+）を放出して，自分は中性子 n^0 になる．そして，パイ中間子 π^+ を吸収した相手の中性子 n^0 は陽子 p^+ に転化する．このようにパイ中間子とよばれる素粒子 π^+ や π^- が核子の間でキャッチボールのようにやりとりされることが陽子と中性子の間に作用する核力の原因だ，というのが湯川のアイディアであった．なお，中間子（メソン）という名前は，陽子と電子の中間の質量をもつ粒子という意味である．

陽子と陽子，中性子と中性子の間にはたらく核力の原因は，電気を帯びていない中性のパイ中間子（記号 π^0）が陽子や中性子によって放出されたり吸収されたりするためだと考えればよい（図(b)）．この場合の放出や吸収で陽子や中性子の電荷は変らないので，陽子は陽子のままで，中性子は中性子のままである．

パイ中間子が波動性を示すときに従う波動方程式は，§2.5 で紹介したクライン - ゴルドン方程式である．

§5.2　不確定性原理とパイ中間子の質量

核力が短距離しか作用しない理由を湯川理論ではどのように説明するのだろうか．相対性理論によれば，質量はエネルギーの1形態で，質量が m の物体は mc^2 という大きさのエネルギーをもつ（§4.2参照）．ここで，c は真空中の光速である．

陽子（質量 m_{p}）が正電荷のパイ中間子（質量 m）を放出して中性子（質量 m_{n}）に変ることは，$m_{\mathrm{p}}c^2 < m_{\mathrm{n}}c^2 + mc^2$ なので，古典物理学ではエネルギー保存則で禁止される．しかし，量子力学では不確定性関係

$$\Delta E\,\Delta t \gtrsim \hbar \tag{5.2}$$

のために，短時間 Δt ならば，$\Delta E \approx \hbar/\Delta t$ 程度のエネルギーの非保存は許される（演習問題［2］参照）．

したがって，陽子がパイ中間子を放出してエネルギー保存則を $\Delta E \approx mc^2$ だけ破ることは

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc^2} \tag{5.3}$$

程度の時間は可能である．この間に，パイ中間子は距離 $l \approx c\,\Delta t$ 移動する．もしこの範囲に別の中性子が存在すれば，この中性子がパイ中間子を吸収して陽子に変り，エネルギー保存則は回復する．つまり，**核力の到達距離** l は

$$l \approx \frac{\hbar}{mc} \tag{5.4}$$

だということになる．

湯川は（5.4）と核力の到達距離 $l \approx 2\times10^{-15}\,\mathrm{m}$ から，パイ中間子の質量 m を

$$m \approx \frac{\hbar}{lc} = \frac{1\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2\times10^{-15}\,\mathrm{m}\times3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 1.7\times10^{-28}\,\mathrm{kg} \tag{5.5}$$

だと予言した．この予言値は，電子の質量 9×10^{-31} kg の約 200 倍である．

このように素粒子物理学では，素粒子の相互作用はそれを仲立ちする素粒子の交換によって生じると考えるので，相互作用の到達距離は仲立ちする素粒子の質量に反比例する．たとえば，電磁相互作用は電荷を帯びた素粒子の間での光子の交換によって生じるが，光子の質量は 0 なので，電磁相互作用の到達距離は（5.4）から無限大ということになる．電気力のクーロンポテンシャルが距離に反比例して徐々に弱くなり，特定の距離から急速に減衰しない理由は，仲立ちする光子の質量が 0 だからである．

§5.3　パイ中間子の発見

湯川の予言した，核子と強く相互作用するパイ中間子は，1947 年にパウエルと共同研究者たちによって，南米ボリビアのアンデス山脈の高地で，宇宙線に照射された写真乾板に写った荷電粒子の飛跡の中に発見された．乾板中でエネルギーを失って静止した後に，荷電粒子と中性粒子に崩壊する宇宙線の粒子として発見されたのである．新しい粒子の質量は，電子の質量の約 300 倍である．新しい粒子の中には，乾板の中で静止して，崩壊せずに乾板中の原子核に吸収されて原子核を破裂させるものがあるので，新しい粒子は原子核と強く相互作用して核力の原因となる粒子であることがわかった．

荷電パイ中間子 π^+（電荷 e）と π^-（電荷 $-e$）は不安定で，1937 年に発見されていたミュー粒子 μ^+（電荷 e）あるいは μ^-（電荷 $-e$）およびニュートリノに崩壊する．

$$\pi^+ \;\rightarrow\; \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \pi^- \;\rightarrow\; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

ミュー粒子 μ^+ と μ^- は電子の約 200 倍の質量をもち，核子とは強く相互作用せず，物質中をよく透過する粒子である．ミュー粒子 μ^+ と μ^- は不安定で，陽電子 e^+ あるいは電子 e^- および 2 個のニュートリノに崩壊する（図 5.4 参照）．

$$\mu^+ \;\rightarrow\; \mathrm{e}^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mathrm{e}, \qquad \mu^- \;\rightarrow\; \mathrm{e}^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

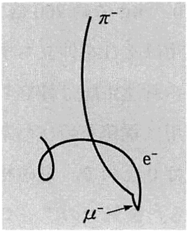


図 5.4　$\pi^- \to \mu^- \to e^-$ 崩壊（$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$，$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$）の写真の模写．中性粒子のニュートリノは写真に写らない．

パイ中間子やミュー粒子の崩壊および 4 種類のニュートリノ ν_μ，$\bar{\nu}_\mu$，ν_e，$\bar{\nu}_e$ については，第 7 章で解説する．

1948 年に米国のカリフォルニア大学の 400 MeV のサイクロトロンで，π^+ と π^- が人工的に作られた．中性のパイ中間子 π^0 も $\pi^- + p^+ \to \pi^0 + n^0$ という反応で人工的に作られて，2 個の光子（記号 γ）に

$$\pi^0 \quad \to \quad \gamma + \gamma$$

と崩壊することがわかった．なお，パイ中間子はスピンが 0 で空間反転で符号を変える擬スカラー粒子であることが，その後の実験でわかった．

§5.4　湯川ポテンシャル

電気力のクーロンポテンシャル

質量が 0 の光子の交換による電気力のクーロンポテンシャルは，到達距離が無限大で，

$$V(r) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{5.6}$$

である．(5.6) を導くには，まず，点 $\boldsymbol{r}_1$ に点電荷 q が静止している場合（電荷密度が $q\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$ の場合）の電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対するポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \tag{5.7}$$

を解いて，電荷がその周りに作るスカラーポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} \tag{5.8}$$

を求める．この結果を使うと，点 $\boldsymbol{r}_2$ に点電荷 q' が静止している場合の電気力による位置エネルギーは

$$V(r) = q'\phi(\boldsymbol{r}_2) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \tag{5.9}$$

であることが導かれる．なお，$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$ は，$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_1$ では 0 で，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$ を含む任意の領域での 3 次元積分が 1 になる，ディラックのデルタ関数である．

核力の湯川ポテンシャル

真空中のパイ中間子の場 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ の従う波動方程式はクライン-ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \mu^2\phi = 0 \qquad \left(\mu = \frac{mc}{\hbar}\right) \tag{5.10}$$

である．原点に静止している核子の周りのパイ中間子場を導くために，パイ中間子がローレンツ変換でスカラーとして変換すると仮定し，このスカラー場と核子の結合定数（電気力の場合の電荷 q に対応する量）が g だとすると，核子の周囲にできるスカラー場（パイ中間子場）$\phi(\boldsymbol{r}, t)$ の方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \mu^2\phi = g\,\delta(\boldsymbol{r}) \tag{5.11}$$

となる．

この方程式の時間によらない解を $\phi(r)$ とすると，原点から距離 r の点に同じ種類の核子が存在する場合の核力ポテンシャル $V(r) = g\,\phi(r)$ の従う方程式は，時間微分が 0 であることに注意すれば，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \mu^2 V = g^2\,\delta(\boldsymbol{r}) \tag{5.12}$$

となる．巻末の付録 B で証明するように，方程式 (5.12) の解は

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi r}e^{-\mu r} \tag{5.13}$$

である．このポテンシャルは，2 核子間の距離 r が

$$r = \frac{\hbar}{mc}\,(= l) \tag{5.14}$$

となる付近から急激に小さくなるので，前節で不確定性原理から導いた核力の到達距離（5.4）の正しさが示された．一般に，核子間距離 r について $e^{-\mu r}/r$ という依存性をもつポテンシャルを**湯川ポテンシャル**という．

図 5.1 に示した核力ポテンシャルの概形からわかるように，核子間距離 r が大きいところでは，$V(r)$ は湯川ポテンシャルの $e^{-\mu r}/r$ という形をしている．しかし，核子間距離 r が小さくなると湯川ポテンシャルからずれてきて，核子間距離が 5×10^{-16} m 以下ではグラフは左上がりになり，核力は強い反発力になる．核力のこの中心部をハードコア（硬い芯）という．

核力ポテンシャルは，その後発見されたいくつかの新しいタイプの中間子の交換によっても媒介されるので，到達距離の短い湯川ポテンシャルの重ね合せ

$$V(r) = \sum_i \frac{G_i}{4\pi r}e^{-\mu_i r} \tag{5.15}$$

として定性的に理解されている．たとえば，ハードコアは，パイ中間子の約 6 倍の質量をもつ電気的に中性でスピン 1 の粒子であるオメガ中間子の交換による反発力として理解できる．なお，パイ中間子は擬スカラー粒子であり，また，核子はスピンとよばれる自転的運動をしているので，パイ中間子の交換による核力ポテンシャルは，スカラー粒子の交換による（5.13）より複雑な形をしている．

2 個の静止している核子の核力による位置エネルギーとして定義された核力ポテンシャルは，非相対論的な概念である．また，高エネルギーの核子と核子の散乱には非相対論的なシュレーディンガー方程式は使えない．つま

り，核力ポテンシャルはシュレーディンガー方程式に現れて，低エネルギーの核子と核子の弾性散乱および陽子と中性子の結合状態である重陽子に対して適用される近似的概念である．

§5.5 アイソスピン

原子核は陽子と中性子から構成されている．陽子も中性子もスピンは 1/2 で，質量はほぼ等しい．そこで，電子にスピン上向きと下向きの 2 つの状態があるように，陽子と中性子を核子の 2 つの状態と考えて，

$$\mathrm{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

と表す．そして，スピン $S = 1/2$ の粒子にはスピンが上向き（$S_z = 1/2$）とスピンが下向き（$S_z = -1/2$）の 2 つの状態があるように，核子は**アイソスピン** $I = 1/2$ の粒子で，陽子はアイソスピンが上向き（$I_3 = 1/2$），中性子はアイソスピンが下向き（$I_3 = -1/2$）の状態と考える．

核子ばかりでなく，3 種類のパイ中間子 π^+，π^0，π^- もパイ中間子というアイソスピン $I = 1$ の粒子のアイソスピンの向きの異なる状態で，π^+ は $I_3 = 1$，π^0 は $I_3 = 0$，π^- は $I_3 = -1$ の状態と考える．アイソスピンが I の素粒子の組を**荷電多重項**，あるいは荷電 $2I+1$ 多重項という．

アイソスピンは，現実の空間とは別の，仮想的な**荷電空間**（**アイソ空間**）の角運動量である．核子とパイ中間子の相互作用が現実の 3 次元空間での回転で不変なら，核子とパイ中間子の系の全角運動量が保存するように，核子とパイ中間子の相互作用が荷電空間での回転で不変なら，核子とパイ中間子の系の全アイソスピンは保存する．核子によるパイ中間子の散乱実験によって，核子とパイ中間子の相互作用が荷電空間での回転で近似的に不変であることが確かめられている．近似的という言葉は，同じ荷電多重項のメンバーの質量にはわずかながら差があること，荷電粒子は電磁相互作用を行うが中性粒子は行わないこと，などによる荷電空間での回転不変性の破れがあるこ

とを意味している．

現在までにいろいろな素粒子が発見されているが，強い相互作用をするすべての素粒子（ハドロン）は荷電多重項に属し，ハドロンの相互作用は近似的にアイソスピンを保存することが知られている．電子，ミュー粒子，ニュートリノなどの強い相互作用をしない素粒子（レプトン）はアイソスピンをもたない．なお，素粒子は弱い相互作用に対しても荷電多重項を作り，「弱いアイソスピン」をもつことを注意しておこう（第7章を参照）．

スピンに対するパウリ行列に対応して，アイソスピンに対するタウ行列

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

を導入する（以下，$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ を表す）．さらに，

$$\tau_+ = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

を定義する．τ_+，τ_-，τ_3 を（5.16）に作用すると

$$\tau_+\mathrm{n} = \mathrm{p}, \quad \tau_+\mathrm{p} = 0, \quad \tau_-\mathrm{p} = \mathrm{n}, \quad \tau_-\mathrm{n} = 0, \quad \tau_3\mathrm{p} = \mathrm{p}, \quad \tau_3\mathrm{n} = -\mathrm{n} \tag{5.19}$$

となる．

2個の核子がある場合，1番目の核子に対するタウ行列を $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$，2番目の核子に対するタウ行列を $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$ と書くと，荷電空間で回転不変なポテンシャルは

$$V_0(r) \quad と \quad (\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)})\,V_1(r) \tag{5.20}$$

である．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)} &= \tau_1{}^{(1)}\tau_1{}^{(2)} + \tau_2{}^{(1)}\tau_2{}^{(2)} + \tau_3{}^{(1)}\tau_3{}^{(2)} \\ &= \sqrt{2}\,\tau_+{}^{(1)}\sqrt{2}\,\tau_-{}^{(2)} + \sqrt{2}\,\tau_-{}^{(1)}\sqrt{2}\,\tau_+{}^{(2)} + \tau_3{}^{(1)}\,\tau_3{}^{(2)} \end{aligned} \tag{5.21}$$

なので，$(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)})\,V_1(r)$ は質量が等しく，アイソスピンが1で電荷が e，$0, -e$ の3種類の中間子 π^+，π^0，π^- の交換によって生じるポテンシャルである（図5.5）．これに対して，$V_0(r)$ はアイソスピンが0で電荷が0の中間子の交換によって生じるポテンシャルである．

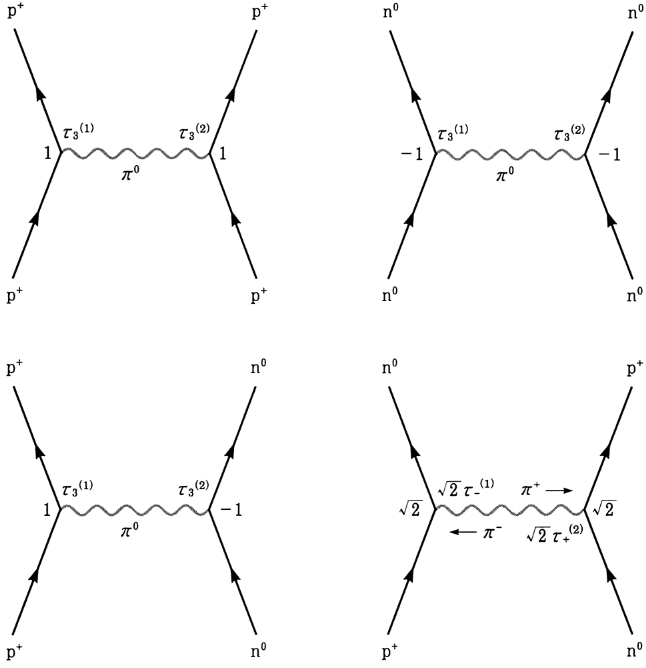


図5.5　アイソスピンが1で電荷が e，0，$-e$ の中間子 π^+，π^0，π^- の交換によって生じるポテンシャルは $(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)})\,V_1(r)$ である．

§5.6　素粒子の共鳴現象

共鳴（resonance）は物理学の多くの分野で起こる現象である．たとえば，ラジオの同調回路が特定の周波数の電波をとらえるのは，ラジオの同調回路が特定の周波数の電波と共鳴するからである．図5.6のような回路にとらえられる電波のエネルギー U は，電波の角周波数 ω の関数として

$$U \propto \frac{1}{(\omega - \omega_{\mathrm{R}})^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{5.22}$$

である．この回路は角周波数が $\omega_R = 1/\sqrt{CL}$ 付近の電波と共鳴する．

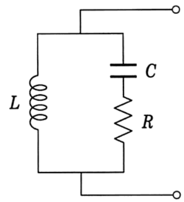


図 5.6

横軸に ω，縦軸に U をとって，(5.22) をプロットすると，$\omega = \omega_R$ に共鳴の山がある．この山の高さ (共鳴の最大値) の半分のところでの山の幅を，共鳴の半値幅あるいは幅という．(5.22) が表す共鳴の半値幅 γ は $\gamma = R/L$ である．電波がとだえたとき，回路に蓄えられている電磁気的エネルギー U は

$$U = U_0 e^{-\gamma t} \tag{5.23}$$

のように減少する．γ の逆数は，電波がこなくなってから電波が回路を流れ続けている平均時間なので (演習問題 [6])，

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \tag{5.24}$$

を，この共鳴の**平均寿命**とよぶ．

素粒子の世界でも共鳴が起きる．パイ中間子を核子に衝突させたときの全断面積をパイ中間子と核子の重心系でのエネルギー E の関数として図 5.7

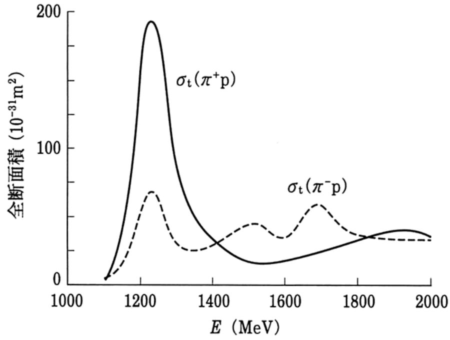


図 5.7　パイ中間子と陽子の衝突の全断面積．横軸 E は，パイ中間子と陽子の重心系での全エネルギー (単位は MeV) である．

のように図示したときに，$E = E_R$ に半値幅が Γ の共鳴があれば，全断面積 σ_t は

$$\sigma_t \propto \frac{1}{(E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{5.25}$$

と表せる．

パイ中間子と核子の衝突の全断面積に (5.25) で表せるような山があれば，静止エネルギーが E_R，つまり，

$$\text{質量} \quad M_R = \frac{E_R}{c^2} \tag{5.26}$$

の共鳴があることになる．量子論の関係 $E = \hbar\omega$ との対応で $\Gamma = \hbar\gamma$ が導かれ，**共鳴は不安定な状態**であり，

$$\text{平均寿命} \quad \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{5.27}$$

であることがわかる．

図 5.7 にパイ中間子と陽子，π^+p と π^-p の全断面積 $\sigma_t(\pi^+\mathrm{p})$ と $\sigma_t(\pi^-\mathrm{p})$ を描いた．断面積の曲線の山は共鳴である．重心エネルギー E が約 1230 MeV の高い共鳴は $\Delta(1232)$ とよばれている．

演 習 問 題

[**1**]　2 個の陽子間にはたらく電気力と万有引力の強さの比を求めよ．

[**2**]　振動を時間 Δt 観測して単位時間当りの振動数 ν を決めるとき，その精度 $\Delta\nu$ を評価する．時間 Δt に波が f 回振動すれば，波の振動数は $f/\Delta t$ であり，波の振動回数を測定するときの不確定さ Δf は約 $1/2\pi$ 回である．したがって，$\Delta\nu \approx 1/2\pi\Delta t$ となる．すなわち，

$$\varDelta\nu\,\varDelta t \approx \frac{1}{2\pi}$$

である．上の記述を説明せよ．この式の両辺にプランク定数を掛けて，$\varDelta E = h\varDelta\nu$ を使うと，測定時間 $\varDelta t$ とエネルギーの測定精度 $\varDelta E$ の不確定性関係

$$\varDelta E\,\varDelta t \approx \hbar$$

が導かれる．

［**3**］ 中性のパイ中間子 π^0 の質量は $2.41 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg} = 135\,\mathrm{MeV}/c^2$ である．この粒子は不安定で，平均寿命 8.4×10^{-17} 秒で 2 個の光子に崩壊する．静止している π^0 が 2 個の光子に崩壊したときに生じる光子のエネルギーを MeV を単位として表せ．

［**4**］ スピンが同じ方向を向いた核子間の核力は，スピンが逆方向を向いた核子間の核力より少し強い．質量数 2 の原子核は重陽子とよばれる $^2_1\mathrm{H}$ だけで，陽子 2 個あるいは中性子 2 個の原子核は存在しない理由を説明せよ（ヒント：パウリ原理）．

［**5**］ 2 核子状態のアイソスピンの大きさは 0 と 1 である．固有状態を記せ．

［**6**］ 電波が途切れた場合，同調回路に蓄えられている電磁気的エネルギー U は

$$U = U_0 e^{-\gamma t}$$

のように減少する．γ の逆数は，電波がこなくなってから電波が回路を流れている平均時間であることを示せ．

6 ディラック方程式

スピン 1/2 粒子の場の相対論的な方程式であるディラック方程式の性質を調べる．ディラック方程式の解の研究から，スピン 1/2 粒子には反粒子が存在することが導かれる．ある粒子の反粒子とは，同じ質量をもち，逆符号の電荷をもつ粒子である．

§6.1　ディラック方程式

シュレーディンガー方程式は非相対論的な方程式である．クライン-ゴルドン方程式は相対論的な方程式であるが，スピンが入っていない．本章では，速度が遅いときにシュレーディンガー方程式と近似的に一致する，スピン 1/2 粒子の場の相対論的な方程式を学ぶ．

シュレーディンガー方程式は時間について 1 階の微分方程式なので，t について 1 階の微分方程式を調べる．ローレンツ変換で時間座標 t と空間座標 x, y, z は混ざり合うので，求める方程式は x, y, z についても 1 階の微分方程式でなければならない．そこで，アインシュタインの関係（4.14）を

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{p^2c^2 + m^2c^4}{E} \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{mc^2}{E}mc^2 \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

と書き直して（$\boldsymbol{v}$ は速度）

$$\left.\begin{array}{lllllll} \boldsymbol{p} & \to & -i\hbar\nabla, & & \boldsymbol{v} & \to & c\boldsymbol{\alpha} \\ E & \to & i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}, & & \dfrac{mc^2}{E} & \to & \beta \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

と置き換えると，新しい波動方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - \beta mc^2\psi = 0 \tag{6.3}$$

が得られる．

波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ $(\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3))$ が表す場の量子はアインシュタインの関係を満たすので，$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ はクライン - ゴルドン方程式

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2\psi - (mc^2)^2\psi = 0 \tag{6.4}$$

を満たさなければならない．そこで，(6.3) に微分演算子

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2 \tag{6.5}$$

を作用すると得られる

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \hbar^2c^2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\psi - (mc^2)^2\beta^2\psi + i\hbar c(mc^2)[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\beta + \beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)]\psi = 0 \tag{6.6}$$

がクライン-ゴルドン方程式を満たすと要請する．したがって，$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は関係

$$\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j = 2\delta^{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{6.7}$$

を満たす行列でなければならない（$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$）．2 行 2 列や 3 行 3 列の行列で関係（6.7）を満たすものはないので，$\boldsymbol{\alpha}$ と β は少なくとも 4 行 4 列の行列でなければならない．たとえば，

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

は，関係 (6.6) を満たす．ここで σ^k はパウリ行列（$\sigma^1 = \sigma_x, \sigma^2 = \sigma_y, \sigma^3 = \sigma_z$）で，$I$ は 2 行 2 列の単位行列である．

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

このような行列 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ を係数とする方程式 (6.3) は 1928 年にディラックによって発見されたので，**ディラック方程式**という．

$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は 4 行 4 列の行列なので，波動関数 ψ は 4 成分をもち

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_2(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_3(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_4(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

と表される．(6.8) の α^k に左から β を掛けた $\gamma^k = \beta\alpha^k$ と $\gamma^0 = \beta$,

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

を定義し，$x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ct$ とおくと，ディラック方程式 (6.3) は

$$i\left(\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0}\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi \tag{6.12}$$

$$\therefore \quad i\sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = \frac{mc}{\hbar}\psi \tag{6.12$'$}$$

という形になり，時間と空間について対称な形，つまり，相対論的に不変な形になる．以降では，(6.12) をディラック方程式とよぶことにする．

さて，(6.10) と (6.11) を (6.12) に代入すると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} iI\dfrac{\hbar}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} & i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\hbar\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla & -iI\dfrac{\hbar}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

ところで，4 行 4 列の γ 行列 γ^μ の行列要素を記すと

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

である．γ^0 はエルミート行列

$$(\gamma^0)_{\alpha\beta}{}^* = (\gamma^0)_{\beta\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0$$

で，$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ は反エルミート行列

$$(\gamma^k)_{\alpha\beta}{}^* = -(\gamma^k)_{\beta\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{6.15}$$

である．ここで，$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}{}^*$ は行列 γ^μ の α 行 β 列成分 $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ の複素共役を意味し，$\gamma^{\mu\dagger}$ は γ^μ のエルミート共役を意味する．4つの γ 行列は反交換関係

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{6.16}$$

を満たす．ここで，$\eta^{\mu\nu}$ は $\eta^{00} = 1$，$\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$，それ以外の場合は 0 である．

最後にディラック場 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ に共役な場 $\psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)$ と $\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\gamma^0$

$$\psi^\dagger = (\psi_1{}^*, \psi_2{}^*, \psi_3{}^*, \psi_4{}^*) \tag{6.17}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_1{}^*, \psi_2{}^*, -\psi_3{}^*, -\psi_4{}^*) \tag{6.18}$$

を導入する．この $\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ は波動方程式

$$-i\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu = \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} \tag{6.19}$$

を満たす（演習問題［1］参照）．

§6.2　ディラック方程式の解

外力の作用を受けずに，一定の運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E で運動しているスピン 1/2 粒子に対応する，ディラック方程式の解 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ を求めよう．この場合，$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$\boldsymbol{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi, \qquad E\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

という条件を満たさなければならないので，解 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \sim \frac{1}{\sqrt{V}}u(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{\hbar} - i\frac{Et}{\hbar}\right) \tag{6.20}$$

という形をしていなければならない．ここで，$u(\boldsymbol{p})$は 4 行 1 列の縦ベクトルである．$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ はクライン-ゴルドン方程式を満たさなければならないので，(6.20) を (6.4) に代入すると，

$$E^2 = |\boldsymbol{p}|^2c^2 + m^2c^4$$

という条件が得られる．したがって，解 (6.20) の E には正と負の場合があり，

$$E = \pm\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2c^2 + m^2c^4} \tag{6.21}$$

である．

4 成分の $u(\boldsymbol{p})$ を 2 成分ずつ

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \qquad u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u_1(\boldsymbol{p}) \\ u_2(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \qquad u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u_3(\boldsymbol{p}) \\ u_4(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

とおいて，(6.20) を (6.13) に代入してみよう．

$E = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2c^2 + m^2c^4} > 0$ の場合には

$$\begin{pmatrix} EI & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & -EI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix} u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

となる．この式を解くと

$$u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E + mc^2}u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \tag{6.24}$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3))$$

である．そこで，2 行 1 列の $u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p})$ の独立なものとして

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.25}$$

を選ぶと，$E > 0$ の場合の 2 つの独立な解として

$$u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p^3 c}{E + mc^2} \\ \dfrac{(p^1 + ip^2)\, c}{E + mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{(p^1 - ip^2)\, c}{E + mc^2} \\ \dfrac{-p^3 c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

が得られる．ここで，$p^1 = p_x$，$p^2 = p_y$，$p^3 = p_z$ で，N は規格化定数である．$u(\boldsymbol{p})$ を

$$\bar{u}(\boldsymbol{p})\, u(\boldsymbol{p}) = \sum_{\alpha=1}^{4} \bar{u}_\alpha(\boldsymbol{p})\, u_\alpha(\boldsymbol{p}) = 1 \tag{6.27}$$

となるように規格化すれば，

$$N = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \tag{6.28}$$

となる．

次に，$E = -\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} < 0$ の場合には，(6.20) を (6.13) に代入すると，

$$\begin{pmatrix} -|E|I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & |E|I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix} u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

となる．この式を解くと

$$u_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}) = -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{|E| + mc^2}\, u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p}) \tag{6.30}$$

となる．そこで，2 行 1 列の $u_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{p})$ の独立なものとして

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

を選ぶと，$E < 0$ の場合の 2 つの独立な解として

$$u^{(3)}(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} \dfrac{-p^3 c}{|E| + mc^2} \\ -\dfrac{(p^1 + ip^2)c}{|E| + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(4)}(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} -\dfrac{(p^1 - ip^2)c}{|E| + mc^2} \\ \dfrac{p^3 c}{|E| + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

が得られる．規格化定数 N は (6.28) に与えられている．

このようにディラック方程式には同じ運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して $u^{(1)}(\boldsymbol{p})$，$u^{(2)}(\boldsymbol{p})$，$u^{(3)}(\boldsymbol{p})$，$u^{(4)}(\boldsymbol{p})$ という 4 種類の独立な解があることがわかった．§6.4 で示すように，この 4 つの独立な解は，スピン 1/2 粒子のスピンの 2 つの向きに対応する 2 つの解と，その反粒子で，やはりスピン 1/2 粒子のスピンの 2 つの向きに対応する 2 つの解に対応している．

このようにして，ディラック方程式の一般解は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{p}} \sqrt{\frac{mc^2}{|E|}} \Big(\sum_{r=1,2} b_{\boldsymbol{p}}{}^{(r)}\, u^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar - i|E|t/\hbar} + \sum_{r=3,4} b_{\boldsymbol{p}}{}^{(r)}\, u^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar + i|E|t/\hbar} \Big) \tag{6.33}$$

と表されることがわかった．なお，規格化因子 $\sqrt{mc^2/|E|}$ の説明は省略する．

§6.3　電磁場がある場合のディラック方程式

ディラック方程式の 4 種類の解の物理的意味を考えるために，電磁場の中で運動する電子に対するディラック方程式を調べる．ハミルトン形式の解析力学では，電荷 q の荷電粒子が

$$\text{電場 } \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \text{磁場 } \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{6.34}$$

の中にある場合には，粒子のハミルトニアンは

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) \quad\rightarrow\quad H(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A},\boldsymbol{x})+q\phi \tag{6.35}$$

のように置き換えたものになる(付録C参照)．したがって，量子論では，

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})=E \tag{6.36}$$

という関係に現れる $\boldsymbol{p}$ と E を

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p} \quad &\rightarrow \quad -i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A} \\ E \quad &\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

のように置き換えた演算子を波動関数に作用させればよい．電子の電荷は $q=-e$ なので，ディラック方程式（6.12）は

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\left(i\nabla-\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\psi+\gamma^0\left(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e}{\hbar c}\phi\right)\psi-\frac{mc}{\hbar}\psi=0 \tag{6.38}$$

となる．

ここで，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ が時刻 t によらない場合を考えることにすると，波動関数の時刻依存性が

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\psi(\boldsymbol{x},t=0)\,e^{-iEt/\hbar} \tag{6.39}$$

となる．ψ の上下の各2成分を分けて

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{A}}\\ \psi_{\mathrm{B}}\end{pmatrix},\qquad \psi_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\qquad \psi_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \tag{6.40}$$

と書くと，（6.38）は次のようになる．

$$i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla+i\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\psi_{\mathrm{B}}=-\left(\frac{E}{\hbar c}+\frac{e\phi}{\hbar c}-\frac{mc}{\hbar}\right)\psi_{\mathrm{A}} \tag{6.41 a}$$

$$-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla+i\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\psi_{\mathrm{A}}=\left(\frac{E}{\hbar c}+\frac{e\phi}{\hbar c}+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi_{\mathrm{B}} \tag{6.41 b}$$

非相対論的近似

非相対論的近似をすることにして，

$$E=mc^2+E^{\mathrm{NR}},\qquad |E^{\mathrm{NR}}|\ll mc^2,\qquad |e\phi|\ll mc^2 \tag{6.42}$$

と仮定する（E^{NR} は非相対論的な物理学での粒子のエネルギー）．（6.41b）を

$$\psi_{\mathrm{B}} \fallingdotseq -\frac{i\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla + i\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\psi_{\mathrm{A}} \tag{6.43}$$

と変形して（6.41 a）の左辺に代入し，

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{K})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{L}) \tag{6.44}$$

と $(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi + (\boldsymbol{A}\times\nabla)\psi = (\nabla\psi\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{B}\psi + (\boldsymbol{A}\times\nabla\psi) = \boldsymbol{B}\psi$ という性質を使うと，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} - e\phi\right]\psi_{\mathrm{A}} = E^{\mathrm{NR}}\psi_{\mathrm{A}} \tag{6.45}$$

が得られる．この式は，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$，スカラーポテンシャル ϕ の中を運動する電荷 $-e$，固有磁気モーメント $-e\hbar/2m$ をもつスピン 1/2 粒子のシュレーディンガー方程式である．

このようにして，非相対論的な場合にはディラック方程式はスピン 1/2 粒子に対するシュレーディンガー方程式に一致することが示され，さらに

電子の固有磁気モーメントは $-\dfrac{e\hbar}{2m}$ である

ことも示された．この**ボーア磁子**とよばれる固有磁気モーメントの値は測定結果とほぼ一致するので，相対論的量子論の正しさを示す大きな成果である．

古典物理学では，角運動量 $\boldsymbol{J}$ で運動している電荷 $-e$，質量 m の荷電粒子の磁気モーメントは $-e\boldsymbol{J}/2m$ である．量子力学では電子のスピン角運動量演算子は $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}\hbar/2$ なので，電子の固有磁気モーメントの演算子 $\boldsymbol{\mu}$ を

$$\boldsymbol{\mu} = g\left(-\frac{e}{2m}\boldsymbol{J}\right) = g\left(-\frac{e\hbar}{4m}\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{6.46}$$

と表すと，ディラック方程式から

$$g = 2 \tag{6.47}$$

となる．（6.46）で定義された g を電子の g 因子とよぶ．

最近の実験結果によれば，電子の g 因子は

$$g = 2\times 1.001159652197 \tag{6.48}$$

である．g 因子の 2 からのわずかなずれは，電子による光子の仮想的な放出・再吸収過程で生じる．1948 年にシュウィンガーは量子電磁気学を使って，理論値

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2) = 2.00232 + O(\alpha^2) \qquad (6.49)$$

を導いた．α は**微細構造定数**とよばれ，演習問題［3］で示すように数値的には

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.03604} \qquad (6.50)$$

である．

§6.4　空孔理論と陽電子

次に，ディラック方程式の負エネルギーの解を考えよう．水素原子の励起状態にある電子は光を放出してエネルギーを失い，低い励起状態に落ちていき，最後に基底状態に落ち着く．水素原子の基底状態は安定なので，基底状態が光を放出する遷移をしてはならない．ところが，負エネルギーの解があると，基底状態はエネルギーが最低の状態ではなくなる（図 6.1）．したがって，水素原子の基底状態にある電子は $E \geqq 2m_e c^2$ の光子を放出して負エネルギーの状態に落ちていく．負エネルギーの状態のエネルギーには下限がないので，限りなく光を出し続けることになる．

1930 年にディラックは，「負エネルギーの状態がすべて電子によって占有されていれば，パウリ原理のために，負エネルギーの状態への遷移は禁止される」ことに気づいた．ディラックによれば，粒子が存在しないと考えられる真空状態は，実は，すべての負エネルギーの状態が電子によっ

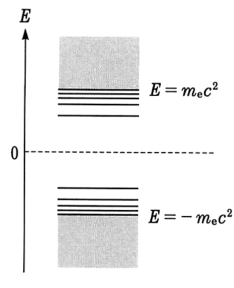


図 6.1　水素原子のエネルギー準位？

て完全に占有されている状態（ディラックの海）なのである．

$E = h\nu \geqq 2m_e c^2$ の光子を吸収して，負エネルギーの状態の電子が正エネルギーの電子になると，電子で占有されていた負エネルギーの状態（ディラックの海）に空孔（ホール）があくことになる．この「孔のあいたディラックの海のエネルギー」は

$$「真空のエネルギー」-(-|E|) = 「真空のエネルギー」+|E|$$

なので，空孔は正エネルギーの粒子のように観測される．

表 6.1　$E < 0$ の電子状態の性質と空孔の性質

$E < 0$ の電子状態	$-e$	$-\|E\|$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{s}$	m_e
空　孔	e	$\|E\|$	$-\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{s}$	m_e

空孔が 1 つできると，この状態の電荷 Q は真空の電荷 Q_0 に比べて，

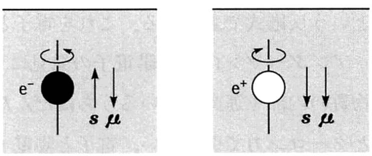
$$Q = Q_0 - (-e) = Q_0 + e \tag{6.51}$$

となり，空孔は正電荷の粒子として観測される．また空孔の運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン $\boldsymbol{s}$ も逆向きになる（表 6.1）．そして，

$$|E|^2 - |-\boldsymbol{p}|^2 c^2 = (m_e c^2)^2 \tag{6.52}$$

なので，空孔の質量は電子の質量に等しい．このようにディラックの海の空孔はスピンが 1/2，質量が m_e，電荷が $+e$ の粒子のように見えるので，これを**陽電子**（ポジトロン）とよび，記号 e^+ で表す．電子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ はスピン $\boldsymbol{s}$ と逆向きであるが，陽電子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ はスピン $\boldsymbol{s}$ と同じ向きを向いている（図 6.2）．

このようにして，ディラック方程式から陽電子の存在が導かれた．ディラック方程式の 4 種類の解は，スピン 1/2 の電子とスピン 1/2 の陽電子に対応する．



(a) 負エネルギーの電子　(b) 空孔

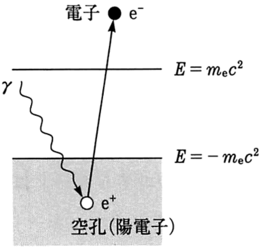
図 6.2

負エネルギー状態の電子が

$E \geqq 2m_ec^2$ の光子を吸収して正エネルギー状態の電子になる過程 $e^-_{E<0} + \gamma \to e^-_{E>0}$ は，真空が正エネルギーの電子と正エネルギーの空孔（つまり陽電子）になる過程なので

$$\gamma \ \rightarrow \ e^- + e^+$$

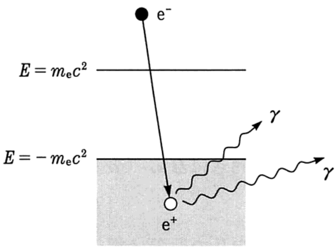
という反応式で表される（図 6.3）．これを電子と陽電子の**対生成**という．このように陽電子を作る一番簡単な方法は，大きなエネルギーをもつ光子を物質の内部で消滅させて，電子と陽電子を対生成させることである．この反応は，光（ガンマ線）のエネルギーが物質に転化した例である．なお，粒子が生成する際にも電荷が保存することに注意しよう．



$\gamma \to e^- + e^+ \ (e^-_{E<0} + \gamma \to e^-_{E>0})$

図 6.3

負エネルギーの電子状態に空孔がある場合（陽電子がある場合），正エネルギーの電子が 2 個の光子を放出して空孔に落ちる過程 $e^-_{E>0} \to e^-_{E<0} + \gamma + \gamma$ は



$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma \ (e^-_{E>0} \to e^-_{E<0} + \gamma + \gamma)$

図 6.4

$$e^- + e^+ \ \rightarrow \ \gamma + \gamma$$

という反応式で表される．これを電子と陽電子の**対消滅**という（図 6.4）．

アンダーソンによる陽電子の発見については§3.1 で紹介した．陽電子は物質の内部を運動しているうちにだんだん速さが遅くなり，原子の中の電子とクーロン力で引き合い，電子と陽電子からできた中性原子のようなものを作る．これを**ポジトロニウム**とよぶ．ポジトロニウムは不安定で，電子と陽電子は対消滅して 2 個か 3 個の光子になる．陽電子は電子と衝突すると消滅して光子になるが，これは陽電子が不安定だからではない．陽電子は真空中

では崩壊して別の粒子になることはないが，我々が住んでいる世界には電子が無数にあるので，陽電子はすぐに電子と衝突して，電子とペアで消滅するのである．陽電子は電子と同じように安定である．

（参考）　空孔理論と場の演算子

空孔理論では，$v^{(s)}(\boldsymbol{p})$ と $d_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)}$ を

$$u^{(3)}(-\boldsymbol{p}) = v^{(2)}(\boldsymbol{p}), \qquad u^{(4)}(-\boldsymbol{p}) = -v^{(1)}(\boldsymbol{p}) \tag{6.53}$$

$$b_{-\boldsymbol{p}}{}^{(3)} = d_{\boldsymbol{p}}{}^{(2)\dagger}, \qquad b_{-\boldsymbol{p}}{}^{(4)} = -d_{\boldsymbol{p}}{}^{(1)\dagger} \tag{6.54}$$

と定義する（†はエルミート共役を意味する）．したがって，(6.33) は

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=1,2}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\left(b_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)}u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} + d_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)\dagger}v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}\right) \tag{6.55}$$

となり，$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ は

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=1,2}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\left(d_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)}\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} + b_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)\dagger}\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}\right) \tag{6.56}$$

となる．ここでは演算子の時間依存性がない表示を選んだ．

§2.4 で説明したように，量子論では場は，粒子を生成させたり消滅させたりする演算子になるので，場の量子論では (6.55) の $\psi(\boldsymbol{x})$ と (6.56) の $\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ は演算子になる．具体的には，$\psi(\boldsymbol{x})$ と $\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ に含まれている $b_b{}^{(s)}$，$b_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)\dagger}$ は電子の消滅演算子，生成演算子で，$d_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)}$，$d_{\boldsymbol{p}}{}^{(s)\dagger}$ は陽電子の消滅演算子，生成演算子である．したがって，$\psi(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x}$ で電子を消滅させ，陽電子を生成する演算子で，$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x}$ で陽電子を消滅させ，電子を生成する演算子である．これから本書に $\psi(\boldsymbol{x})$，$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ という記号が出てきたら，それらは場の演算子を表す．なお，第7章では，電子場の演算子を $\psi(\boldsymbol{x})$，$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})$ ではなく $\psi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})$，$\bar{\psi}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})$ と記す．

§6.5　反陽子と反中性子

ディラック方程式は，光速に近い速さで運動する，すべてのスピン 1/2 粒子の場の方程式である．陽子も中性子もスピンは 1/2 なので，陽子（質量 m_{p}，電荷 e）の反粒子である**反陽子**（質量 m_{p}，電荷 $-e$，記号 $\bar{\mathrm{p}}^-$）と中性子（質量 m_{n}，電荷 0）の反粒子である**反中性子**（質量 m_{n}，電荷 0，記号 $\bar{\mathrm{n}}^0$）が存在する．

ディラック方程式によると，電荷 e の陽子の固有磁気モーメント μ_{p} は

$e\hbar/2m_{\mathrm{p}}$ で，中性子の固有磁気モーメント μ_{n} は 0 だと予想されるが，実験によると

$$\mu_{\mathrm{p}} = 2.79284739\frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{p}}} \tag{6.57}$$

$$\mu_{\mathrm{n}} = -1.9130428\frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{p}}} \tag{6.58}$$

である（$\mu_{\mathrm{n}} < 0$ は中性子の磁気モーメントとスピンが逆向きであることを意味する）．この予想と実験の不一致の原因は，陽子と中性子がクォーク 3 個から成る複合粒子だからであると考えられている（第 8 章の演習問題［8］参照）．

第 1 章では，原子核を構成する陽子と中性子の数の和を質量数とよんだ．素粒子物理学では，質量数を**バリオン数**（あるいは重粒子数）という．バリオン数は，中性子が陽子に変化するベータ崩壊でも保存する．つまり，陽子も中性子もバリオン数 1 をもち，バリオン数は不変である．負エネルギーの状態の陽子と中性子もバリオン数 1 をもつので，反陽子と反中性子のバリオン数は −1 である．

電子，陽電子，パイ中間子，光子，ミュー粒子，ニュートリノなどのバリオン数を 0 と定めると，自然界で観測されている素粒子反応はすべてバリオン数を保存する反応であり，バリオン数を保存しない反応，たとえば，

$$\mathrm{p}^+ \ \rightarrow\ \mathrm{e}^+ + \gamma, \qquad \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- \ \rightarrow\ \gamma + \gamma$$

などは起こらない．これを**バリオン数の保存則**という．バリオン数の保存則は陽子の安定性を保証し，物質の安定性を保証する法則である．

§6.6　反 粒 子

反粒子が存在するのはスピンが 1/2 の素粒子だけではない．どのようなスピンの素粒子も反粒子をもつ．スピンが 0 の π^+ と π^- は粒子と反粒子の関係にある．ある素粒子 A とその反粒子 $\bar{\mathrm{A}}$ の性質を表 6.2 に示す．「場の方

表 6.2　粒子とその反粒子の性質

	粒子 A	反粒子 $\bar{\mathrm{A}}$
質　量	m	m
平均寿命*	τ	τ
スピン	s	s
電　荷	Q	$-Q$
磁気モーメント	μ	$-\mu$
バリオン数	B	$-B$

*　安定な素粒子の平均寿命は無限大である.

程式は荷電共役変換，空間反転，時間反転を同時に行うと不変である」という場の量子論の CPT 定理によれば，

「すべての素粒子には反粒子が存在し，粒子と反粒子は同じ質量と同じ平均寿命と同じスピンの大きさをもち，電荷の大きさは同じで逆符号である.」

なお，CPT 定理の C は荷電共役変換 (charge conjugation)，P はパリティ (parity)，T は時間反転 (time reversal) の略である.

粒子と反粒子が同一の粒子の場合もある．このような粒子は電荷もバリオン数も 0 である．光子 γ と中性パイ中間子 π^0 は，粒子と反粒子が同じ場合の例である.

素粒子反応の反応式に現れる素粒子を → の反対側に移項できる．ただし，移項する際には，逆符号の電荷と逆符号のバリオン数をもつ反粒子に変えなければならない．粒子 A の反粒子を $\bar{\mathrm{A}}$，粒子 C の反粒子を $\bar{\mathrm{C}}$ と記すと，反応

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \;\rightarrow\; \mathrm{C} + \mathrm{D}$$

が起これば，A と C を反粒子に変えて移項した反応

$$\bar{\mathrm{C}} + \mathrm{B} \;\rightarrow\; \bar{\mathrm{A}} + \mathrm{D}$$

が必ず起こる．また，不安定粒子の崩壊

$$\mathrm{A} \;\rightarrow\; \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}$$

が起これば，次の反応も必ず起こる．

$$\bar{\mathrm{B}} + \mathrm{A} \ \rightarrow \ \mathrm{C} + \mathrm{D}, \qquad \bar{\mathrm{C}} + \mathrm{A} \ \rightarrow \ \mathrm{B} + \mathrm{D}$$

ある反応に関与するすべての素粒子を反粒子に変えた反応を，**荷電共役**な反応という．ある反応の振幅が荷電共役な反応の振幅と同じ場合には，この反応は**荷電共役変換で不変**であるという．

§6.7　空間反転と時間反転

空間反転とパリティ

万有引力をおよぼし合う 2 つの物体の運動方程式（G_N：重力定数）

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = - G_\mathrm{N} \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}}, \qquad m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = - G_\mathrm{N} \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r_{12}} \tag{6.59}$$

の 1 つの解を $[\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]$ とすると，$[-\boldsymbol{r}_1(t), -\boldsymbol{r}_2(t)]$ も解である．2 つの解は各時刻において原点に関して点対称なので，1 つの解を，もう 1 つの解を空間反転した解という．

空間の各点を原点に関して点対称の位置に移す変換である空間反転，

$$\boldsymbol{r}(t) \ \rightarrow \ -\boldsymbol{r}(t)$$
$$[x(t) \ \rightarrow \ -x(t), \ \ y(t) \ \rightarrow \ -y(t), \ \ z(t) \ \rightarrow \ -z(t)] \tag{6.60}$$

において，運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ と角運動量 $\boldsymbol{L}(t)$ は次のように変化する．

$$\boldsymbol{p}(t) \ \rightarrow \ -\boldsymbol{p}(t) \tag{6.61 a}$$

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) \ \rightarrow \ \boldsymbol{L}(t) = [-\boldsymbol{r}(t)] \times [-\boldsymbol{p}(t)] \tag{6.61 b}$$

空間反転しても荷電粒子の電荷は不変なので，空間反転で電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ は

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) \ \rightarrow \ \rho(-\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \ \rightarrow \ -\boldsymbol{j}(-\boldsymbol{r}, t) \tag{6.62}$$

と変化する．そこで，電場と磁場に対するマクスウェル方程式

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}, \quad \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0, \quad \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \end{aligned}\right\} \tag{6.63}$$

の1つの解を $[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)]$ とすると，$[-\boldsymbol{E}(-\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{r},t)]$ は方程式（6.63）で $\rho(\boldsymbol{r},t)$ を $\rho(-\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ を $-\boldsymbol{j}(-\boldsymbol{r},t)$ とおいた場合の解となる．このように古典力学でも電磁気学でも，任意の解に対してそれを空間反転した解が存在する．そこで，古典力学と電磁気学は空間反転で不変であるという．

空間反転で不変なハミルトニアン H のシュレーディンガー方程式

$$H\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{6.64}$$

の1つの解を $\psi(\boldsymbol{r},t)$ とすると，$\psi(-\boldsymbol{r},t)$ も解である．$\psi(\boldsymbol{r},t)$ が縮退していない固有状態ならば，$\psi(-\boldsymbol{r},t)$ は $\psi(\boldsymbol{r},t)$ の定数倍でなければならず，

$$\psi(-\boldsymbol{r},t)=c\,\psi(\boldsymbol{r},t), \quad \psi(\boldsymbol{r},t)=c\,\psi(-\boldsymbol{r},t) \tag{6.65}$$

となるので，$c^2=1$．したがって，$c=\pm 1$，つまり

$$\psi(-\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r},t) \quad \text{または} \quad \psi(-\boldsymbol{r},t)=-\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{6.66}$$

となる．前者の場合（$c=1$）に**パリティは偶**（even），後者の場合（$c=-1$）に**パリティは奇**（odd）であるという．なお，$P=+1$，$P=-1$ と表すこともある．

ある反応の前後の状態のパリティを P_i，P_f，つまり，

$$\psi_\mathrm{i}(-\boldsymbol{r})=P_\mathrm{i}\,\psi_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}), \quad \psi_\mathrm{f}(-\boldsymbol{r})=P_\mathrm{f}\,\psi_\mathrm{f}(\boldsymbol{r}) \tag{6.67}$$

とする．もしハミルトニアンが空間反転で不変ならば，

$$\begin{aligned}\iiint\psi_\mathrm{f}^*(\boldsymbol{r})\,H\,\psi_\mathrm{i}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}&=\iiint\psi_\mathrm{f}^*(-\boldsymbol{r})\,H\,\psi_\mathrm{i}(-\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}\\&=P_\mathrm{f}P_\mathrm{i}\iiint\psi_\mathrm{f}^*(\boldsymbol{r})\,H\,\psi_\mathrm{i}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{6.68}$$

となり，$P_\mathrm{i}=P_\mathrm{f}$，すなわち，反応の前後でパリティは保存することがわか

る．なお，パリティの保存しない反応の遷移確率は 0 なので，この反応は起こらないことがわかる．

第 7 章で学ぶように，弱い相互作用による反応ではパリティは保存せず，したがって，弱い相互作用のハミルトニアンは空間反転で不変ではない．

スピン 0 の粒子の場 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ の方程式は，空間反転で

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) \quad \rightarrow \quad \phi(-\boldsymbol{r}, t) \tag{6.69 a}$$

という置き換えをすれば不変な場合と，

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) \quad \rightarrow \quad -\phi(-\boldsymbol{r}, t) \tag{6.69 b}$$

という置き換えをすれば不変な場合がある．前者の場合には場の量子の**パリティ**は**偶**で**スカラー粒子**とよび，後者の場合には場の量子の**パリティ**は**奇**で**擬スカラー粒子**とよぶ．

例題 6.1

2 個のスピン 0 の粒子 A，B の束縛状態のパリティを求めよ．

［**解**］　2 粒子の相対運動の軌道量子数を L とすると，相対運動の波動関数は

$$f_L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (-1)^L f_L(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \tag{6.70}$$

という性質をもつので（球面調和関数の性質 $Y_{Lm}(\pi-\theta, \phi+\pi) = (-1)^L Y_{Lm}(\theta, \phi)$ を使った），

$$\phi_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}) = P_{\mathrm{A}}\phi_{\mathrm{A}}(-\boldsymbol{x}), \qquad \phi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y}) = P_{\mathrm{B}}\phi_{\mathrm{B}}(-\boldsymbol{y}) \tag{6.71}$$

を使うと，重心系での束縛状態の波動関数は，空間反転で

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x})\, f_L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, \phi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y}) \quad &\rightarrow \quad \phi_{\mathrm{A}}(-\boldsymbol{x})\, f_L(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\, \phi_{\mathrm{B}}(-\boldsymbol{y}) \\ &= P_{\mathrm{A}}P_{\mathrm{B}}(-1)^L\, \phi_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x})\, f_L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, \phi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{6.72}$$

と変換する．したがって，この束縛状態のパリティ P は

$$P = P_{\mathrm{A}}P_{\mathrm{B}}(-1)^L \tag{6.73}$$

である．P_{A}，P_{B} は粒子 A，B のパリティである．

反粒子のパリティ

ボソンの場合には粒子と反粒子のパリティは同じである．フェルミオンの場合には粒子と反粒子のパリティは逆符号であることがディラック方程式から導かれる．

例 1．　スピン 1/2 粒子とその反粒子の束縛状態のパリティ　　粒子 A とその反粒子 $\bar{\mathrm{A}}$ のパリティは逆なので，相対運動の軌道量子数を L とすると，この束縛状態のパリティは

$$P = P_{\mathrm{A}} P_{\bar{\mathrm{A}}} (-1)^L = -(-1)^L \tag{6.74}$$

である．

時 間 反 転

時間反転（$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}, t \to -t$）とは，映画のフィルムを逆回しにするようなことである．力学の運動方程式 (6.59) の 1 つの解を $[\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]$ とすると，$[\boldsymbol{r}_1(-t), \boldsymbol{r}_2(-t)]$ も解である．時間反転で

$$\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}(-t), \quad \boldsymbol{p}(t) \to -\boldsymbol{p}(-t), \quad \boldsymbol{L}(t) \to -\boldsymbol{L}(-t) \tag{6.75}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) \to \rho(\boldsymbol{r}, -t), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \to -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, -t) \tag{6.76}$$

と変換するので，マクスウェル方程式 (6.63) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, -t), \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \to -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, -t) \tag{6.77}$$

という変換で不変である．

なお，磁場がない場合のシュレーディンガー方程式 (6.64) の 1 つの解を $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ とすると，$\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)$ も解であり，シュレーディンガー方程式は時間反転で不変である．

演習問題

［1］ $\bar{\psi}(\boldsymbol{r}, t)$ に対する方程式は

$$-\sum_{\mu=0}^{3} i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} = \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi}$$

であることを示せ．

［2］ 4元ベクトルである，電子の電荷密度 $j^0 = c\rho = -ec\bar{\psi}\gamma^0\psi$，電流密度 $\boldsymbol{j} = -ec\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$は，ローレンツ変換で不変な連続方程式

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

を満たすことを示せ．

［3］ $e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ を計算せよ．

［4］ 中性粒子 A の反粒子 $\bar{\mathrm{A}}$ が A と違うのはどのような場合か．

［5］ ポジトロニウムは消滅して1個の光子になることはない $(\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \gamma)$ のはなぜか．

［6］ 磁場の中の電子のシュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) + a\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi(\boldsymbol{r}, t) = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

の1つの解を $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ とすると，$\sigma_2\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)$ は，この方程式を $\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{r}, t \rightarrow -t, \boldsymbol{B} \rightarrow -\boldsymbol{B}$と時間反転したものの解であること，したがって，この方程式は時間反転で不変であることを示せ．

［7］ $\psi(x)$ がディラック方程式 (6.38) の解ならば，$\psi^C(x) = C[\bar{\psi}(x)]^T$（$T$ は転置行列を意味する）は式 (6.38) で$e \rightarrow -e$とした，ψ と反対電荷の素粒子に対するディラック方程式の解であることを示せ．C は

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C = -(\gamma^{\mu})^T$$

を満たす行列で，たとえば

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．また

$$C[\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{p})]^T = -v^{(1)}(\boldsymbol{p}), \qquad C[\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{p})]^T = -v^{(2)}(\boldsymbol{p})$$

が成り立つことを示せ．

[8]
$$\gamma^0 u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = u^{(1)}(-\boldsymbol{p}), \qquad \gamma^0 u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = u^{(2)}(-\boldsymbol{p})$$
$$\gamma^0 u^{(3)}(\boldsymbol{p}) = -u^{(3)}(-\boldsymbol{p}), \qquad \gamma^0 u^{(4)}(\boldsymbol{p}) = -u^{(4)}(-\boldsymbol{p})$$

を示せ．

[9] 次の文章を読み，どのような近似をしたのかを考えよ．

g^2 の大きさを評価してみよう．クーロンポテンシャル $-e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ で結合している水素原子の基底状態の半径は $4\pi\varepsilon_0\hbar^2/e^2 m_{\mathrm{e}}$ で，結合エネルギーは $m_{\mathrm{e}}e^4/32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2$ である．重陽子を構成する陽子と中性子の間にはたらく核力ポテンシャルを $-g^2/4\pi r$ で近似し，重陽子の半径 $a_{\mathrm{D}} \approx 4\times 10^{-15}\,\mathrm{m} \approx 4\pi\hbar^2/g^2(m_{\mathrm{p}}/2)$，結合エネルギー $E_{\mathrm{D}} \approx 2.2\,\mathrm{MeV} \approx (m_{\mathrm{p}}/2)g^4/32\pi^2\hbar^2$ から g^2 を計算すると（$m_{\mathrm{p}}/2$ は有効質量），

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 0.1$$

と推定される．

[10] (6.38) は，共変ベクトルで表した 4 元電磁ポテンシャル $A_\mu = (\phi/c, -\boldsymbol{A})$ を使うと

$$\sum_{\mu=0}^{3} i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi$$

と表せることを示せ．

ディラック方程式の導き方

量子力学や素粒子の多くの教科書に書いてあるディラック方程式の導出法は，ディラックの教科書「量子力学」（岩波書店）に出ている導出法である．本書では，私の学生時代の講義ノートに書いてある宮沢弘成先生の授業での導出法を利用させて頂いた．

40年ほど前に朝永さんと雑談していたときに，「ディラック方程式のどの導き方がよいと思いますか」と伺ったことがある．それに対するお答は，「出てきた法則が実験と合えば，導き方はどうでもよい．白い猫でも黒い猫でも，ねずみを獲る猫がよい猫だというでしょ」であった．なお，いうまでもないことであるが，基本法則は導かれたり理論的に証明されたりするものではない．

7 ニュートリノと弱い相互作用

ベータ崩壊の発見に始まる弱い相互作用の研究の歴史は，ニュートリノの研究の歴史でもあった．ニュートリノの研究は進んだが，まだ謎がある．本章では，まずニュートリノの関与する現象を通じて，3種類あるニュートリノの理解を深めると共に，パリティの非保存などの弱い相互作用の特徴を学ぶ．続いて，弱い相互作用の統一的理解の鍵である弱い相互作用を仲立ちするゲージボソンのウィークボソンについて学ぶ．第9章でも弱い相互作用をさらに学ぶ．

§7.1 ベータ崩壊とニュートリノ

放射能

1895年にレントゲンがX線を発見した．放電管を使った研究をしていた際に，放電管のそばに置いてあった密封した未使用の写真乾板が感光していたことに気づいたのが，X線発見のきっかけであった．X線は，電子の衝突によって蛍光を発している放電管のガラス壁から発生していた．

この話を知ったベクレルは，蛍光物質も密封した写真乾板を感光させるのではないかと予想して，黒い紙に包んだ未使用の写真乾板の上に蛍光物質であるウラン化合物を置いたところ，ウラン化合物は放射線を放射し，この放射線はX線と同様，写真乾板を感光させ，また，空気をイオン化して導電性にして箔検電器を放電させることを1896年に発見した．

キュリー夫妻はウラン以外の物質も同じような性質を示すかどうかを確か

めるために，ウランの原鉱のピッチブレンドを化学分析で成分に分けていき，その結果1898年に，ラジウムRa，ポロニウムPoなどのウランよりもはるかに強く放射線を放射する元素を発見した．

天然の放射性物質によって放射される放射線には，アルファ線，ベータ線，ガンマ線の3成分があることがわかった．アルファ線の実体はヘリウム原子核，ベータ線の実体は高速度の電子，ガンマ線の実体は波長の短い電磁波である．

ベータ崩壊と保存則

ベータ崩壊で原子核の中から負電荷をもつ電子が放出されるときには，原子核の中の電気的に中性の中性子は正電荷をもつ陽子に変り，原子核が別の原子核に変換する．

原子核 N_1（質量 m_1）が電子を放出して別の原子核 N_2（質量 m_2）に変るベータ崩壊の反応式が

$$N_1 \quad \to \quad N_2 + e^-$$

であるとする．静止している原子核 N_1 の静止エネルギー m_1c^2 が，原子核 N_2 の静止エネルギー m_2c^2，原子核 N_2 の運動エネルギー $p^2/2m_2$，電子の静止エネルギー m_ec^2 と電子の運動エネルギー K の和，つまり，$m_2c^2 + m_ec^2 + p^2/2m_2 + K$ になるので，原子核 N_2 の極めて小さい運動エネルギー $p^2/2m_2$ を無視すると，電子の運動エネルギー K はエネルギー保存則から

$$K = m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2 = 一定$$

となる（正確な値は演習問題［1］参照）．したがって，ベータ崩壊で飛び出してくる電子のエネルギースペクトルは，図7.1の線スペクトルだと予想された．

ところがチャドウィックは，ベータ線のスペクトルは線スペクトルではなく，連続スペクトルであることを見出した．電子の運動エネルギー K は最大値 $E_{max} = m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2$ と0の間に，図7.1の曲線のように分布

していたのである．また，$^{210}_{83}$Bi の崩壊では，ガンマ線が放射されていないことも確認された．したがって，N_1 原子核の崩壊が $N_1 \to N_2 + e^-$ であれば，ベータ崩壊でエネルギーが保存しないことになる．

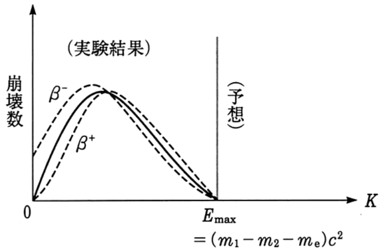


図 7.1　ベータ崩壊で発生する電子の運動エネルギー K の分布．原子核の作用するクーロン力のため，e^- を放出する場合（β^-）と e^+ を放出する場合（β^+）に差がある．実線はクーロン力を無視したフェルミの理論計算値．

ベータ崩壊が $N_1 \to N_2 + e^-$ で，電子だけが放出されるのであれば，エネルギー保存則ばかりでなく，角運動量の保存則も成り立たない．たとえば，中性子のベータ崩壊が $n^0 \to p^+ + e^-$ だとする．中性子，陽子，電子はすべてスピン 1/2 粒子なので，崩壊前のスピン角運動量の z 方向成分は $\hbar/2$ または $-\hbar/2$ であるが，崩壊後のスピン角運動量の z 方向成分は，図 7.2 に示すように $\hbar, 0$，あるいは $-\hbar$ であり，保存しない．ここでは，崩壊後の 2 粒子の相対運動の軌道角運動量を無視したが，この z 方

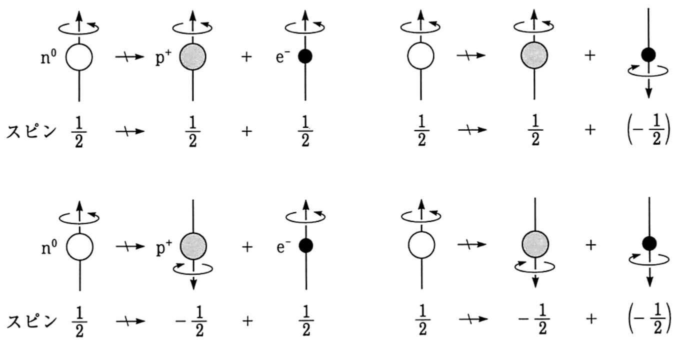


図 7.2　中性子のベータ崩壊が $n^0 \to p^+ + e^-$ だとすると，角運動量の保存則は成り立たない．角運動量の単位の $\hbar$ は省略した．

向成分は $\hbar$ の整数倍なので，これを考えても保存則はやはり成り立たない．

ニュートリノの発明

1930 年にパウリは，エネルギー保存則と角運動量保存則をベータ崩壊で成り立たせるには，電子と一緒にスピンが 1/2 で，電荷を帯びていない未知の粒子が放出されていると仮定すればよい，と主張した．ベータ崩壊で放出される電子の運動エネルギーの最大値はほぼ $m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2$ なので，この未知の粒子の質量は 0 か非常に小さいと考える必要がある．そこで，この粒子は，中性の小さいものという意味の**ニュートリノ**という名前でよばれるようになった（記号は ν）．現在，ニュートリノの質量は極めて小さいが，0 ではないことがわかっている（第 9 章を参照）．

ニュートリノを導入すると，ベータ崩壊では，原子核は 3 個の粒子に崩壊する．

$$\text{原子核 } \mathrm{N_1} \;\rightarrow\; \text{原子核 } \mathrm{N_2} + \text{電子 } \mathrm{e^-} + \text{ニュートリノ } \nu$$

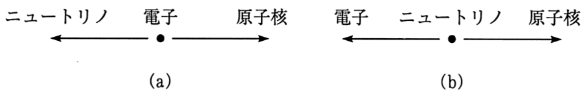


図 7.3

3 個の粒子が全体としてエネルギー m_1c^2 をもち，全体として運動量をもたないという条件では，放出される電子の運動エネルギーは決まらない．図 7.3(a) の場合には電子の運動エネルギーは 0 で，図(b) の場合には電子の運動エネルギー K は最大で，

$$K = E_{\max} \approx m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2 \tag{7.1}$$

である．

ニュートリノのスピンを 1/2 とすると，中性子のベータ崩壊での角運動量の非保存の困難は解消する．

このようにして，原子核は陽子と中性子から構成されているが，不安定な原子核ではベータ崩壊が起こる瞬間に電子とニュートリノが発生して，それ

が原子核の外に飛び出していくことがわかった．たとえば $^{14}_{6}$C のように中性子の多い不安定な原子核では，ベータ崩壊の瞬間に，核内の中性子が陽子に変換して，

$$\text{“n”} \quad \to \quad \text{“p”} + e^- + \nu$$

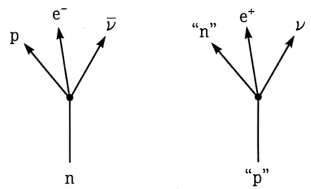
という反応が起こるが，$^{15}_{8}$O のように陽子の多い不安定な原子核では，ベータ崩壊の瞬間に，核内の陽子が中性子に変換するのと同時に陽電子とニュートリノが発生して，

$$\text{“p”} \quad \to \quad \text{“n”} + e^+ + \nu$$

という反応が起こる．“n” と “p” は，原子核の内部に束縛されている中性子と陽子を表している．

§7.2 フェルミ相互作用

1934 年にフェルミは，ベータ崩壊における核子の変換（n → p）と電子とニュートリノの生成は同一時刻に同一地点で起こるとして（図 7.4），量子論を使ってベータ崩壊の理論を定式化した．そして電子のエネルギースペクトルを計算して，理論と実験が良く一致することを示した（図 7.1 の曲線）．



(a) $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ (b) $\text{“p”} \to \text{“n”} + e^+ + \nu$

図 7.4

中性子，陽子，電子，ニュートリノはすべてスピン 1/2 の粒子なので，ディラック方程式に従う．場の量子論では，波動場は粒子（量子）を生成し，消滅させる作用をもつ演算子である．§6.4 で学んだように，中性子場 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ で中性子を消滅させ反中性子を生成する演算子，陽子場に共役な場 $\overline{\psi}_p(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ で陽子を生成し反陽子を消滅させる演算子，電子場に共役な場 $\overline{\psi}_e(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ で電子を生成し陽電子を消滅させる演算子，ニュー

トリノ場 $\psi_\nu(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ でニュートリノを消滅させ反ニュートリノを生成する演算子である．

そこで，次のような相互作用のハミルトン演算子

$$H_{\mathrm{W}} = G_{\mathrm{F}} \iiint d\boldsymbol{r} \, [\, \overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}) \, \psi_\nu(\boldsymbol{r}) \,] [\, \overline{\psi}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}) \, \psi_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}) \,] + \mathrm{hc} \tag{7.2}$$

を考える（hc はエルミート共役項を意味する）．点 $\boldsymbol{r}$ に 1 個の中性子が存在しているという状態に，このハミルトン演算子を作用すると，点 $\boldsymbol{r}$ の中性子は消滅し，同じ点に陽子，電子，反ニュートリノが 1 個ずつ生成するので，(7.2) は図 7.4(a) に示した中性子のベータ崩壊

$$\mathrm{n}^0 \;\to\; \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$$

を引き起こす相互作用であることがわかる．この相互作用を**フェルミ相互作用**といい，相互作用の強さを表す定数 G_{F} を**フェルミ結合定数**とよぶ．

ベータ崩壊で電子と一緒に生成するニュートリノを反ニュートリノと定義したことに注意しよう．これ以降では，電子と一緒に生成するニュートリノを**反ニュートリノ**（記号 $\bar{\nu}$）と定義し，陽電子と一緒に生成するニュートリノをニュートリノ（記号 ν）と定義する．なお，図 7.4(b) の陽電子とニュートリノが生成するベータ崩壊は，(7.2) の hc（エルミート共役項）の部分によって引き起こされる（演習問題［2］参照）．

フェルミは，ハミルトン演算子 (7.2) を使ってベータ崩壊で出てくる電子のスペクトルを再現し，結合定数を決めた．この定数の次元は複雑なので，この定数と陽子の質量 m_{p}，$\hbar$，c を使って無次元の量を作ると，

$$\frac{(m_{\mathrm{p}} c^2)^2 G_{\mathrm{F}}}{(\hbar c)^3} \approx 10^{-5} \tag{7.3}$$

となる．この値は，電磁相互作用の結合定数から作られる無次元の量（微細構造定数）$e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$ と比べると，極めて小さいことがわかる．そこで，ベータ崩壊を引き起こす原因となる相互作用を**弱い相互作用**とよぶ．原子核の中では，電磁相互作用よりはるかに強い，核子とパイ中間子の相互

作用は**強い相互作用**とよばれる．

ベータ崩壊で，核子が変換する点 $\boldsymbol{r}$ と電子とニュートリノが生成する点 $\boldsymbol{r}'$ が異なる場合には，弱い相互作用のハミルトン演算子（7.2）は

$$H_{\mathrm{w}} = \iiint d\boldsymbol{r} \iiint d\boldsymbol{r}' \left[\overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}') \psi_{\nu}(\boldsymbol{r}') \right] V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \left[\overline{\psi}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}) \psi_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}) \right] + \mathrm{hc} \tag{7.4}$$

となる（図 7.5）．（7.2）は，（7.4）で

$$V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = G_{\mathrm{F}}\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{7.5}$$

の場合に対応している．

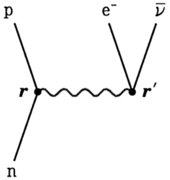


図 7.5 弱い相互作用が素粒子で仲立ちされる場合

ところで，弱い相互作用を仲立ちする素粒子が存在して，その質量が m_{W} だとすると

$$V(r) \approx \frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_{\mathrm{W}} c r/\hbar} \tag{7.6}$$

と表される（§5.4 参照）．この場合，$r \gtrsim \hbar/m_{\mathrm{W}}c$ では $V(r) \approx 0$ である．したがって，フェルミ相互作用は m_{W} が大きいので，弱い相互作用の到達距離が無視できる場合になっていることが示唆される．

（7.5），（7.6）の 2 つのポテンシャルの体積積分を等しいとおくと，

$$G_{\mathrm{F}} = \frac{g^2}{\left(\dfrac{m_{\mathrm{W}} c}{\hbar}\right)^2} \quad \text{つまり} \quad \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{10^{-5}}{4\pi}\left(\frac{m_{\mathrm{W}}}{m_{\mathrm{p}}}\right)^2 \tag{7.7}$$

となる（演習問題［3］）．この結果は，弱い相互作用を仲立ちする素粒子の質量が陽子の質量の 100 倍近くなら，弱い相互作用の無次元の結合定数 $g^2/4\pi\hbar c$ と電磁相互作用の無次元の結合定数 $e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$ が同じくらいの強さになることを意味する．

§7.3 ニュートリノの検証

ニュートリノの存在を確かめるには，ニュートリノが検出器に検出される

必要がある．荷電粒子は，物質中では周りの分子をイオン化するので容易に検出できる．中性子と光子は電荷を帯びていないが，中性子はパラフィンのような陽子を多く含む物質から陽子を叩き出し，光子は光電効果で電子を叩き出すので，叩き出された荷電粒子を検出することによって中性子と光子を間接的に検出できる．

それでは，電気を帯びていないニュートリノも，物質に衝突させて荷電粒子を叩き出させることによって間接的に検出できないだろうか．素粒子物理学では中性子のベータ崩壊の反応式

$$n^0 \quad \rightarrow \quad p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

の右辺の e^- を反粒子の e^+ に変えて，左辺に移項した，

$$n^0 + e^+ \quad \rightarrow \quad p^+ + \bar{\nu}$$

という反応の起こることが予言でき，その逆反応の

$$\bar{\nu} + p^+ \quad \rightarrow \quad n^0 + e^+$$

の起こることも予言できる．

したがって，

$$\text{原子核 A} \quad \rightarrow \quad \text{原子核 B} + e^- + \bar{\nu}$$

という反応で発生したニュートリノ $\bar{\nu}$ によって

$$\bar{\nu} + p^+ \quad \rightarrow \quad n^0 + e^+$$

という反応が起こることが予言できる（図 7.6）．しかし，この相互作用は極めて弱いので，荷電粒子の e^+ を叩き出させる可能性は極めて低い．エネルギーが数 MeV のニュートリノと中性子の衝突断面積は約 10^{-47} m^2 なので，1 m^3 当り約 10^{30} 個の陽子を含んでいる普通の物質中でのニュートリノの平均自由行程は $1/n\sigma \approx 10^{17}$ m という大変な長さである．しかし，莫大な数のニュートリノを含むビームを陽子に衝突させれば，反応を検出できる可能性がある．

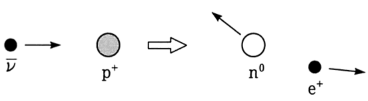


図 7.6　$\bar{\nu} + p^+ \rightarrow n^0 + e^+$

第2次世界大戦後に，密度の高いニュートリノビームと光子に対する感度の良いシンチレーション検出器の利用が可能になった．1950年代に，ライネスとコーワンは，多量のニュートリノ源として，原子炉の中で起こる核分裂での生成物である不安定な中性子過剰核がベータ崩壊するときに発生するニュートリノ $\bar{\nu}$ を使用した．実験に使用した原子炉では，炉の表面の $1\,\mathrm{cm}^2$ 当り，1秒間に約 1.3×10^{13} 個のニュートリノ $\bar{\nu}$ が出てきた．原子炉のそばに置いた，大きな検出器の中央タンクの150 kgの水に含まれている陽子が，入射ニュートリノ $\bar{\nu}$ の標的である．中央タンクの両側にはそれぞれ約1トンの液体シンチレーター（蛍光物質）の入っているタンクがある（図7.7）．

ニュートリノ $\bar{\nu}$ が陽子 p^+ と衝突して，$\bar{\nu} + \mathrm{p}^+ \to \mathrm{n}^0 + \mathrm{e}^+$ 反応で陽電子 e^+ と中性子 n^0 が発生したとする．陽電子 e^+ は原子の中の電子 e^- とペアで消滅して，2個の光子が反対向きに飛び出す $(\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \gamma + \gamma)$．2個の光子は両方とも，電子と陽電子の静止エネルギーである約0.51 MeVのエネルギーをもっているはずである．この2個の光子はシンチレータータンクの

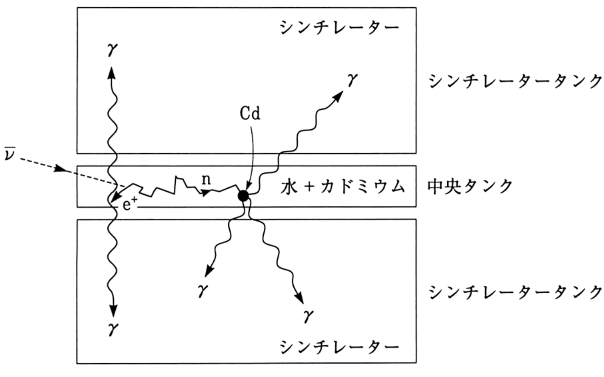


図7.7　ニュートリノの検出．$\bar{\nu} + \mathrm{p}^+ \to \mathrm{n}^0 + \mathrm{e}^+$ 反応で発生する陽電子は電子とペアで消滅して2個の光子 γ になり，発生する中性子はカドミウム原子核に吸収されて数個の光子 γ を発生する．発生した光子がシンチレーター（蛍光物質）に吸収されたときに出す光を光電子増倍管で検出する．

中の蛍光物質に吸収されてタンクの中で光を発するので，シンチレーター タンクの周囲に置いてある光電子増倍管で検出される．そして，検出された光の強度が 0.51 MeV の光子によるものと考えられる場合には，論理回路に入力する．

一方，発生した中性子は水分子中の原子核と衝突を続け，数マイクロ秒かかって十分に減速された後で，中央タンクに少量含まれているカドミウム原子核に吸収されて，全エネルギーが約 9 MeV の 3～4 個の光子を放出する．この光子もシンチレータータンクの中の蛍光物質に吸収されて光を出すので，この光を光電子増倍管で検出し，論理回路に入力する．そして，電子と陽電子の消滅で発生した 2 個の光子が検出されてから 0.75 ～ 27 マイクロ秒後に論理回路に入力された場合に，ニュートリノ $\bar{\nu}$ による $\bar{\nu} + p^+ \rightarrow n^0 + e^+$ 反応が起こったと考える．

原子炉を運転している場合には，運転していない場合に比べて，この反応が 1 時間当り（36 ± 4）反応多く起こることが発見されたので，この反応の起こる衝突断面積は，予想通り，約 $10^{-47}\,m^2$ であることがわかった．実験結果が理論の予想通りだったことから，ニュートリノの存在が確かめられた．

§7.4　ミューニュートリノと電子ニュートリノ

荷電パイ中間子 π^+，π^- やミュー粒子 μ^+，μ^- の崩壊でもニュートリノが発生する．それでは，パイ中間子の崩壊（$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$）でミュー粒子と一緒に放出されるニュートリノを物質に入射すると何が発生するだろうか．

この実験は 1962 年にレーダーマン，シュウォーツとスタインバーガーによって行われた．彼らは，陽子加速器から出てくる 15 GeV の陽子ビームをベリリウム（Be）標的に衝突させて，パイ中間子を大量に発生させた．パイ中間子は空気中をほぼ前方に飛んでいき，飛んでいるうちにパイ中間子はミュー粒子とニュートリノに崩壊する．残ったパイ中間子と崩壊生成物の

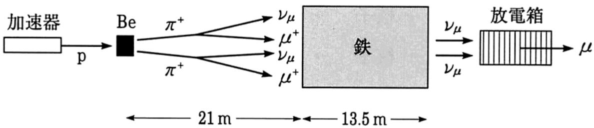


図7.8　2種類のニュートリノ（ν_e，と ν_μ）の存在を確かめた実験

ミュー粒子を13.5 mの厚い鉄の壁で止めてしまい，壁の反対側にはニュートリノだけが入るようにする．壁の反対側には放電箱が置いてあり，ニュートリノビームで照射される（図7.8）．この放電箱は1.1 m四方で，厚さが2.5 cmのアルミニウム板90枚を1 cm間隔に並べ，アルミニウム板の間にネオンガスを封入したものであった．放電箱とは，荷電粒子がその中を通ると通り道のネオンがイオン化され，イオンに沿って放電が起こるので，荷電粒子の飛跡が調べられる装置である．

この実験は8ヶ月間行われ，その結果，約50個のミュー粒子が放電箱の中で発生し，電子は1個も発生しなかった．

この結果，ニュートリノには電子あるいは陽電子と一緒に発生する**電子ニュートリノ**（記号 ν_e，$\bar{\nu}_e$）と，ミュー粒子と一緒に発生する**ミューニュートリノ**（ν_μ，$\bar{\nu}_\mu$）の2種類があることがわかった．

§7.5　レプトンとレプトン数

電子ニュートリノ ν_e と反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ をそれぞれ，

“p” → “n” $+ e^+ + \nu_e$ 反応と $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ 反応で発生するもの

と定義し，ミューニュートリノ ν_μ と反ミューニュートリノ $\bar{\nu}_\mu$ を

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 反応と $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 反応で発生するもの

と定義すると，これらの4種類のニュートリノを核子あるいは原子核に衝突させた場合に，

$$\nu_e + \text{核子} \quad \to \quad e^- + \text{ハドロン}$$
$$\bar{\nu}_e + \text{核子} \quad \to \quad e^+ + \text{ハドロン}$$

$$\nu_\mu + \text{核子} \rightarrow \mu^- + \text{ハドロン}$$
$$\bar{\nu}_\mu + \text{核子} \rightarrow \mu^+ + \text{ハドロン}$$

および

$$\nu_e + \text{核子} \rightarrow \nu_e + \text{ハドロン}$$
$$\bar{\nu}_e + \text{核子} \rightarrow \bar{\nu}_e + \text{ハドロン}$$
$$\nu_\mu + \text{核子} \rightarrow \nu_\mu + \text{ハドロン}$$
$$\bar{\nu}_\mu + \text{核子} \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \text{ハドロン}$$

などの反応は起こるが，これら以外の反応は起こらないことがこれまでに行われた実験によって，極めて高い確率で確かめられている（この規則を破るニュートリノ振動については§9.6を参照）．上に示したニュートリノが発生する4つの反応については§7.8で議論する．なお，ハドロンとは強い相互作用をする素粒子である．

そこで，各粒子に対して表7.1に示すように**電子数** N_e と**ミュー粒子数** N_μ を指定すると，電子数保存則とミュー粒子数保存則が成り立てば上記の

表7.1　レプトン数

粒子	電子数 N_e	ミュー粒子数 N_μ	タウ粒子数 N_τ
e^-	1	0	0
e^+	−1	0	0
ν_e	1	0	0
$\bar{\nu}_e$	−1	0	0
μ^-	0	1	0
μ^+	0	−1	0
ν_μ	0	1	0
$\bar{\nu}_\mu$	0	−1	0
τ^-	0	0	1
τ^+	0	0	−1
ν_τ	0	0	1
$\bar{\nu}_\tau$	0	0	−1
その他	0	0	0

レプトン数 ＝ 電子数 ＋ ミュー粒子数 ＋ タウ粒子数

反応が起こり，それ以外の終状態の反応は禁止される．また，これらの保存則によって，ミュー粒子の崩壊は

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

であることになる．

これまでに行われた実験によって，強い相互作用を行わず，電磁相互作用と弱い相互作用だけを行う荷電粒子には，電子 e^- と陽電子 e^+，ミュー粒子 μ^- と μ^+，それにタウ粒子 τ^- と τ^+ の 3 種類が存在し，弱い相互作用だけを行う電気的に中性なニュートリノには ν_e，$\bar{\nu}_e$，ν_μ，$\bar{\nu}_\mu$，それに ν_τ，$\bar{\nu}_\tau$ の 3 つのペアがあることがわかった．タウ粒子に対しても，タウ粒子数 N_τ の保存則が成り立つと考えられている．強い相互作用を行わないこれらの粒子を**レプトン**と総称する．

なぜ，(e^-，e^+，ν_e，$\bar{\nu}_e$)，(μ^-，μ^+，ν_μ，$\bar{\nu}_\mu$)，(τ^-，τ^+，ν_τ，$\bar{\nu}_\tau$) という 3 組のレプトンが存在するのかは，素粒子物理学の謎の 1 つである．

§9.6 で学ぶように，ニュートリノ振動という現象があり，電子数，ミュー粒子数，タウ粒子数は厳密には保存しない．しかし，3 つの粒子数の和である**レプトン数**（= 電子数 + ミュー粒子数 + タウ粒子数）はバリオン数と同じ精度で保存していると考えられている．

§7.6　パリティの破れ

次章で紹介する，スピンが 0 で正電荷のケイ中間子である K^+ は，$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$，$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ という 2 つのタイプの崩壊を行う不安定な粒子である．ところが，最初の崩壊の終状態のパリティは偶（プラス）で，第 2 の崩壊の終状態のパリティは奇（マイナス）であることがわかった（演習問題 [4] 参照）．

§6.7 で示したように，万有引力で作用する 2 物体の運動方程式も電磁気学のマクスウェル方程式も，空間反転で不変である．さて，量子力学では，

ハミルトン演算子 H が空間反転 $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$，$t \to t$ で不変な場合には，H の縮退していない固有状態のパリティは偶か奇のいずれかである．原子・分子と光の相互作用のそれまでの研究から，原子・分子のエネルギー準位は決まったパリティをもつことがわかっていたので，量子力学のハミルトン演算子は空間反転で不変だと考えられた．したがって，すべての自然法則は空間反転で不変であると信じられるようになっていた．

そこで，K^+ がパリティの逆な 2 つの状態に崩壊する現象は 1954～56 年頃の研究者を悩ませた．（$\pi^+ + \pi^0$ に崩壊する粒子と $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ に崩壊する粒子が同じ質量をもつ別の粒子だとすると，なぜ 2 つの粒子が同じ寿命をもつのかがわからなかった．）

1956 年に李（リー）政道と楊（ヤン）振寧は，分光学的な研究からは，原子・分子のエネルギー準位にはパリティの異なる状態が振幅に 10^{-5} 程度までなら混ざっている可能性があることを示し，弱い相互作用は空間反転で不変ではないと主張し，不変性の破れを検証できる可能性のあるいくつかの実験を示唆した．

李と楊の示唆に基づいて，1957 年に呉（ウー）健雄と協同研究者たちは，極低温に冷却した放射性同位体 $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ を磁場の中に置き，コバルト原子核の磁気モーメント，つまり，スピンを整列させ，ベータ崩壊

$$^{60}_{27}\mathrm{Co} \quad \to \quad ^{60}_{28}\mathrm{Ni}^* + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

で出てくる電子の角分布を測定した．その結果，電子はコバルト原子核のスピンの向きと逆方向に多く出ることがわかった（図 7.9(a)）．

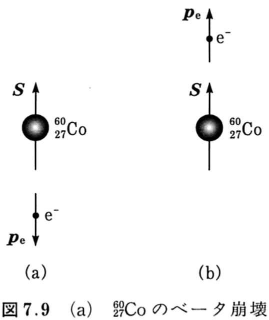


図 7.9　(a)　$^{60}_{27}\mathrm{Co}$ のベータ崩壊の実験結果
(b)　実験結果を空間反転したもの

空間反転でスピンの向きは変らないが，運動量は逆方向を向くので（図 (b)），この実験は，$^{60}_{27}\mathrm{Co}$ のベータ崩壊が空間反転で不変

でないことを示す.

$^{60}_{28}$Ni* は $^{60}_{28}$Ni のスピンが 4 の励起状態で, $^{60}_{27}$Co の基底状態のスピンは 5 である. したがって, 電子 e^- と反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ の合成スピンの大きさは 1 で, スピンの向きは $^{60}_{27}$Co のスピンと同じ向きを向いている必要がある. また, 図 7.10 に示すように, スピン 1/2 の電子は左回りに自転していることになる. スピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ の運動方向の成分 $h = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ を**ヘリシティ**というので, 電子のヘリシティは $-\hbar/2$ であるが, これを**左巻き**という. 一方, スピンの向きが電子のスピンと同じ向きで, 電子とは逆向きに飛び出す反電子ニュートリノのヘリシティは $\hbar/2$ で, これを**右巻き**という.

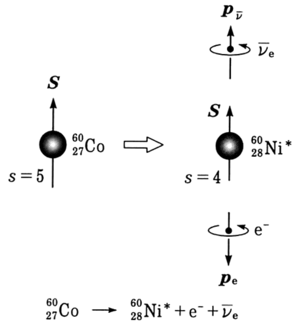


図 7.10

実験によれば, すべてのニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ は左巻きで, すべての反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$ は右巻きである (図 7.11). 右巻きの ν_e, ν_μ, ν_τ と左巻きの $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$ は発見されていない. 左巻きの ν_e, ν_μ, ν_τ を空間反転すれば右巻きの ν_e, ν_μ, ν_τ になるので, この実験結果は,

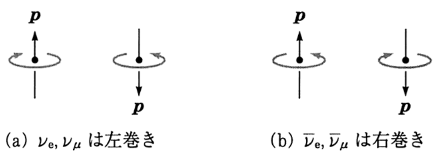


図 7.11

ニュートリノの関与するすべての現象ではパリティが保存しない

ことを示す.

ニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ は左巻きで, 反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$ は右巻きという実験結果は,

ニュートリノの関与するすべての現象は粒子を反粒子に変える荷電共役変換で不変でない

ことを示す．

粒子のスピンの右巻き，左巻きという状態は，粒子と観測者の相対運動によって変化することに注意しよう．いま，直線運動している粒子を後ろから追っている観測者がいるとする．粒子の方が速い場合に，粒子のスピンは観測者には右巻きに見えるとする．観測者が加速して，粒子よりも速くなれば，粒子と観測者の相対運動の向きは逆になる．しかし，粒子のスピンの向きは同じに見えるので，今度は，この観測者に粒子のスピンは左巻きに見えることになる．しかし，このようなことが起こらない場合がある．それは，粒子の質量が 0 で，速さが常に光速の場合である．

§7.7　カレント－カレント相互作用と W ボソン

偏極した原子核や素粒子のベータ崩壊の実験が増えるにつれ，それらの実験結果から，中性子のベータ崩壊のハミルトン演算子は

$$H_{\mathrm{W}} \approx \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \iiint d\boldsymbol{r}\, [\,\overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})\,\gamma_{\mu}(1-\gamma^{5})\,\psi_{\nu_{\mathrm{e}}}(\boldsymbol{r})\,] \times [\,\overline{\psi}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r})\,\gamma^{\mu}(1-1.27\gamma^{5})\,\psi_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r})\,] + \mathrm{hc} \tag{7.8}$$

と表され，ミュー粒子の $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ 崩壊のハミルトン演算子は

$$H_{\mathrm{W}} = \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \iiint d\boldsymbol{r}\, [\,\overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})\,\gamma_{\mu}(1-\gamma^{5})\,\psi_{\nu_{\mathrm{e}}}(\boldsymbol{r})\,] \times [\,\overline{\psi}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{r})\,\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})\,\psi_{\mu}(\boldsymbol{r})\,] + \mathrm{hc} \tag{7.9}$$

と表されることがわかった．式の中の 1 は 4 行 4 列の恒等行列で，γ^5 は

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

である．γ^5 は γ^μ と反交換で，2 乗すると 4 行 4 列の恒等行列になる．

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad (\gamma^5)^2 = 1 \tag{7.11}$$

(7.8)，(7.9) を眺めると，次に記す 2 つの特徴に気づく．

第 1 の特徴は，電子ニュートリノ，ミューニュートリノ，電子，ミュー粒子の場 ψ_{ν_e}，ψ_{ν_μ}，ψ_e，ψ_μ は

$$(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e}, \qquad (1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}, \qquad (1-\gamma^5)\psi_e, \qquad (1-\gamma^5)\psi_\mu$$

などのように，場の前に $1-\gamma^5$ という行列が掛かった形で現れることである（演習問題［5］参照）．さて，$+z$ 方向に運動している質量 0 のスピン 1/2 粒子の波動関数は，(6.26)，(6.32)，(6.53) から

$$u^{(1)} = v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

である．u は粒子，v は反粒子に対応し，右肩の (1) はスピンの向きが $+z$ 方向を向いていて右巻きであることを意味し，右肩の (2) は左巻きを意味する．これらの 4 行 1 列のベクトルに左から 4 行 4 列の行列 $(1-\gamma^5)/2$ を掛けると

$$\frac{1-\gamma^5}{2}u^{(1)} = 0, \qquad \frac{1-\gamma^5}{2}v^{(1)} = v^{(1)} \tag{7.13 a}$$

$$\frac{1-\gamma^5}{2}u^{(2)} = u^{(2)}, \qquad \frac{1-\gamma^5}{2}v^{(2)} = 0 \tag{7.13 b}$$

となる．つまり，$(1-\gamma^5)/2$ は，質量が 0 でスピン 1/2 粒子の場 ψ に作用すると，粒子の左巻き成分とその反粒子の右巻き成分のみを選び出す演算子である．したがって，ハミルトン演算子 (7.8)，(7.9) は，質量が 0 か極め

て小さいことがわかっているニュートリノに対しては，弱い相互作用は左巻きのニュートリノと右巻きの反ニュートリノだけに作用する，という実験事実を再現することがわかる．

質量が0ではないスピン1/2粒子の場合も，高速で運動しているので，$pc \fallingdotseq E \gg mc^2$ の場合には，(7.13) は近似的に成り立つ．図7.10に示されている，ベータ崩壊で飛び出す高速の電子（粒子）が左巻きなのはこのためである．したがって，スピンが0のパイ中間子の $\pi^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$，$\pi^- \to \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ という崩壊は，角運動量保存則によって極めて小さくなる．これに対して，ミュー粒子の質量は電子の質量の200倍もあるので，パイ中間子の崩壊 $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ で飛び出す μ^- 粒子の速さは遅く，$(1-\gamma^5)\psi_\mu(\boldsymbol{r})$ は大きな右巻き成分を含む．そこで，ほとんどのパイ中間子はミュー粒子とニュートリノに崩壊するのである（$\pi^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ 崩壊の確率は $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 崩壊の確率の百万分の1にすぎない）．

(7.8)，(7.9) の第2の特徴は，

$$J_{\mathrm{W}\mu}{}^\dagger(\boldsymbol{r}) J_\mathrm{W}{}^\mu(\boldsymbol{r}) = J_\mathrm{W}{}^{0\dagger}(\boldsymbol{r}) J_\mathrm{W}{}^0(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{J}_\mathrm{W}{}^\dagger(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{J}_\mathrm{W}(\boldsymbol{r}) \tag{7.14}$$

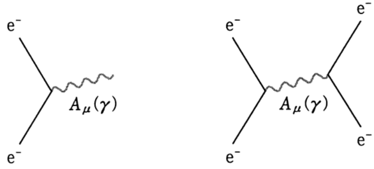
$$\begin{aligned} J_\mathrm{W}{}^\mu(\boldsymbol{r}) = {} & [\bar{\psi}_{\nu_\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_\mathrm{e}(\boldsymbol{r})] + [\bar{\psi}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{r})\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_\mu(\boldsymbol{r})] \\ & + [\bar{\psi}_\mathrm{p}(\boldsymbol{r})\gamma^\mu(1-1.27\gamma^5)\psi_\mathrm{n}(\boldsymbol{r})] + \cdots \end{aligned} \tag{7.15 a}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{W}\mu}{}^\dagger(\boldsymbol{r}) = {} & [\bar{\psi}_\mathrm{e}(\boldsymbol{r})\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})] + [\bar{\psi}_\mu(\boldsymbol{r})\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}(\boldsymbol{r})] \\ & + [\bar{\psi}_\mathrm{n}(\boldsymbol{r})\gamma_\mu(1-1.27\gamma^5)\psi_\mathrm{p}(\boldsymbol{r})] + \cdots \end{aligned} \tag{7.15 b}$$

という4元ベクトルのローレンツ不変な内積の形をしていることである．

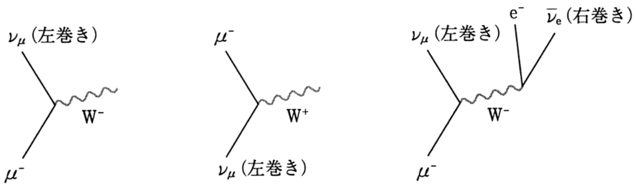
この形は，電子の4元電荷電流密度 $j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) = -ec\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ と4元電磁ポテンシャル $A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ の内積の $j^\mu A_\mu (= \rho\phi - \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A})$ という基本的電磁相互作用を通じて（図7.12(a)），電荷と電荷，電流と電流が4元電磁ポテンシャル(粒子像では光子)を媒介にして作用し合う事実（図(b)）を思い出させる．

そこで，(7.15) の 4 元ベクトル $J_W{}^{\mu}$ を**弱いカレント**（流れ）あるいは**ウィークカレント**といい，相互作用 (7.8)，(7.9) を弱い相互作用の**カレント－カレント相互作用**という．$J_W{}^{\mu}$ は演算子として粒子の電荷を変化させるので，**荷電カレント**ともいう．



(a)　(b)

図 7.12　(a) 基本的な電磁相互作用（波動像では荷電粒子による電磁場（4 元電磁ポテンシャル）の生成，粒子像では光子の放出・吸収）
(b)　電磁場（波動像）あるいは光子（粒子像）が媒介する荷電粒子の電磁相互作用



(a) W^- の放出　(b) W^+ の放出　(c) W ボソンの仲立ちによるミュー粒子の崩壊

図 7.13

電磁相互作用を手本にすると，4 元電磁ポテンシャル A^{μ} とスピン 1 の光子 γ に対応する，弱い相互作用を媒介する 4 元ベクトルの場 W^{μ} とスピン 1 の粒子 W が存在しそうである（図 7.13）．弱い相互作用を媒介する素粒子（ゲージボソン）を**ウィークボソン**という．図からわかるように，ウィークボソンには電荷 e の W^+ と電荷 $-$e の W^- の 2 種類があるはずである．**W ボソン**とよばれている W^+ と W^- の質量は，§7.2 で推測したように，陽子の質量の約 100 倍だと予想される．

高エネルギーの陽子 - 反陽子衝突型加速器で，高エネルギーの陽子中の u クォークと反陽子中の反 d クォークが正面衝突して W^+ ボソンが生成され



(a) $u+\bar{d} \to W^+ \to e^+ + \nu_e$　　(b) $d+\bar{u} \to W^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

図 7.14　W ボソンの生成と崩壊過程の例．u，d は陽子（uud）の構成要素，ū，d̄ は反陽子（ūūd̄）の構成要素

れば，

$$W^+ \;\to\; e^+ + \nu_e, \qquad W^+ \;\to\; \mu^+ + \nu_\mu$$

などの崩壊が起こる（図 7.14(a)）．また，陽子中の d クォークと反陽子中の反 u（ū）クォークが正面衝突して W^- ボソンが生成されれば，

$$W^- \;\to\; e^- + \bar{\nu}_e, \qquad W^- \;\to\; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

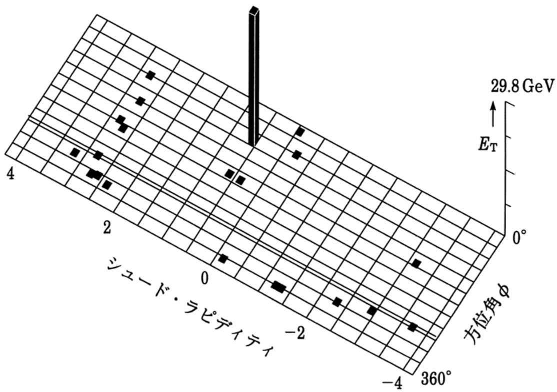


図 7.15　高エネルギー陽子と反陽子の衝突による W ボソンの生成と電子およびニュートリノへの崩壊事象．衝突点から各方向へ出てきて検出された粒子のエネルギー量を棒で表した分布図（レゴプロット）を示す．入射ビーム方向を z 軸として，それに対する方位角 θ に対応する量のシュード・ラピディティと，xy 平面方向の方位角 ϕ に対する分布を描いた．高い山は W ボソンの崩壊で発生した電子のエネルギーに対応している．運動量の保存から，ほぼ反対方向に同じ運動量をもち，検出されなかったニュートリノが放出されたはずである．E_T は入射ビームに垂直な方向のエネルギー（～運動量×c）である．

（CDF 実験グループ提供）

などの崩壊が起こる（図 (b)).

崩壊生成物のニュートリノは検出されないので，高エネルギーの陽子と反陽子の衝突実験で，高エネルギーの電子あるいはミュー粒子が発生し，大きな運動量とエネルギーが行方不明になった現象が起これば，W ボソンが生成された有力な証拠になる．このような方法で，1983 年にヨーロッパ原子核研究所（CERN）の陽子 - 反陽子衝突型加速器 Sp$\bar{\text{p}}$S で W ボソンが発見された（図 7.15).

W ボソンの質量 m_{W} の最近の実験値は

$$m_{\mathrm{W}} = 80.4\,\mathrm{GeV}/c^2$$

であり，陽子の質量の 86 倍である．

（**参考**）**ハドロンの荷電カレント**　荷電カレント (7.15) の中の中性子の陽子へのベータ崩壊の部分には，$1-\gamma^5$ ではなく $1-1.27\gamma^5$ が現れる．1.27 が現れる理由は，中性子や陽子は物質構造の基本粒子ではなく，次章で学ぶように，u クォークと d クォークから構成された複合粒子だからである．したがって，中性子のベータ崩壊を引き起こすハドロンの荷電カレントは，u クォークと d クォークの場の演算子によって

$$\bar{\psi}_{\mathrm{u}}(\boldsymbol{r})\,\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\,\psi_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r}) \tag{7.16}$$

と表される．なお，この形は厳密には正しくない．正しい形は第 9 章で示す．

§7.8 中性カレント

核力を仲立ちする素粒子のパイ中間子には π^+，π^0，π^- の 3 種類がある．弱い相互作用を仲立ちするウィークボソンにも，W^+ と W^- の 2 種類以外に，電荷を帯びていないものが存在するのではないだろうか．

電荷を帯びていないウィークボソンは **Z ボソン**とよばれている（記号 Z^0）．Z ボソンが存在すれば，図 7.16(a) に示す過程で

$$\nu_\mu + \mathrm{e}^- \;\rightarrow\; \nu_\mu + \mathrm{e}^-$$

という反応が起こることが期待されるし，

$$\nu_\mu + \text{原子核} \;\rightarrow\; \nu_\mu + \text{ハドロン}$$

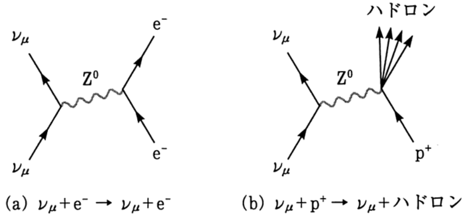


図 7.16

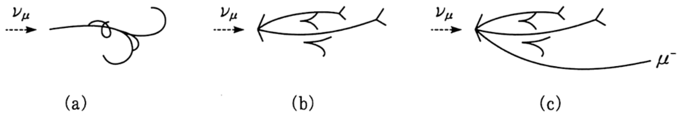


図 7.17　(a)　左側から入射したミューニュートリノが静止している電子と衝突して，電子を右の方に動き始めさせた．
(b)　Z ボソンの交換によって生じる ν_μ ＋ 原子核 → ν_μ ＋ ハドロン反応の泡箱写真の概念図
(c)　W ボソンの交換によって生じる ν_μ ＋ 原子核 → μ^- ＋ ハドロン反応の泡箱写真の概念図

という反応が起こることも期待できる（図 (b)）．W ボソン（W^+，W^-）の交換では起こらないこれらの反応は，1973 年に CERN で発見された（図 7.17）．

電荷を帯びていない Z ボソンの交換によって生じる弱い相互作用を，**中性カレント**による弱い相互作用という．

高エネルギーの陽子中のクォークと反陽子中の反クォーク（u と $\bar{u}$，d と $\bar{d}$）が正面衝突して Z ボソンが生成されれば，

$$Z^0 \ \to \ e^+ + e^-, \qquad Z^0 \ \to \ \mu^+ + \mu^-$$

という崩壊を行う（図 7.18）．そこで，高エネルギーの電子と陽電子のペアと高エネルギーの正負のミュー粒子のペアの検出によって，Z ボソンを発見できる（図 7.19）．Z ボソンも，1983 年に CERN の陽子 - 反陽子衝突型加速器 $Sp\bar{p}S$ で発見された．



(a) $u+\bar{u} \to Z^0 \to e^+ + e^-$　　(b) $d+\bar{d} \to Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$

図 7.18　Z ボソンの生成と崩壊過程の例．u，d は陽子（uud）の構成要素，ū，d̄ は反陽子（ūūd̄）の構成要素

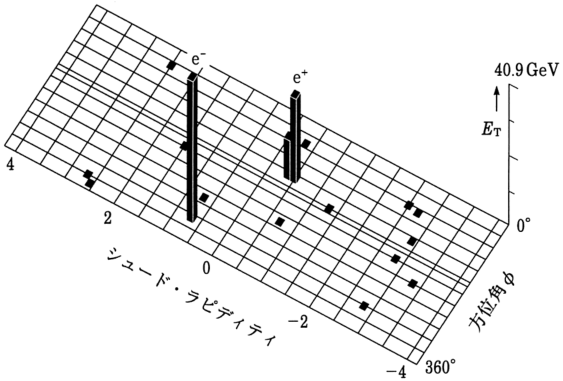


図 7.19　高エネルギー陽子と反陽子の衝突による Z ボソンの生成と，電子および陽電子への崩壊事象のレゴプロットを示す．(CDF 実験グループ提供)

その後，CERN の高エネルギーの電子 - 陽電子衝突型加速器 LEP が建設され（§3.2 参照），莫大な数の Z ボソンが

$$e^+ + e^- \;\to\; Z^0 \;\to\; e^+ + e^-$$

$$e^+ + e^- \;\to\; Z^0 \;\to\; \mu^+ + \mu^-$$

という過程で検出された．

Z ボソンの質量 m_Z の最近の実験値は

$$m_Z = 91.2\ \mathrm{GeV}/c^2$$

であり，陽子の質量の 97 倍である．

§7.9　対称性の自発的な破れと電弱統一模型

3つのウィークボソン W^+，W^-，Z^0 が発見されたが，それらの質量は同じではなく，Z ボソンと W ボソンには 11 GeV/c^2 という大きな質量差が存在し，W と Z という別の名前が付いている．その理由は，**電弱統一模型**を学べば明らかになる．

よく知られているように，昔は電気と磁気は別のものだと考えられていた．しかし，電流の磁気作用や電磁誘導などの発見によって，電気と磁気は互いに関係し合っていることがわかり，まとめて電磁気とよぶようになった．低エネルギーでは強さがまったく異なる電磁相互作用と弱い相互作用は別の相互作用だと考えられていたが，今では互いに関係し合っていて，まとめて電弱相互作用として統一的に理解すべきものであることがわかっている．これが電弱統一模型であり，**対称性の自発的な破れ**というアイディアを使って，1967〜68年にワインバーグとサラムによって定式化された．

対称性の自発的な破れ

電弱統一模型の理解に必要な対称性の自発的な破れを，まず説明しよう．

自然界にはいろいろな対称性がある．運動法則がある対称性をもっていれば，この対称性をもつ解が存在する．しかし，どの対称な解よりもエネルギーの低い非対称な解が存在する場合がある．このような場合には，対称な解は不安定で，「対称性は自発的に破れている」という．

ここで例を示そう．竹を丸く削って細い棒を作り，机の上に垂直に立てる．この回転対称な状態の棒を上から強く押すと，棒は弓なりになって回転対称ではない状態になる（図7.20）．これは，縦に縮んで回転対称性を保つより，弓なりになる方が

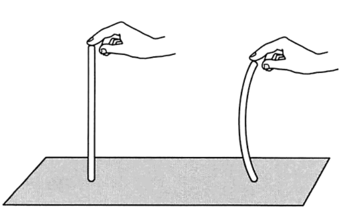


図 7.20　竹の棒の回転対称性（左）が自発的に破れた状態（右）

棒の弾性エネルギーが少なく，安定だからである．

磁場がないときには，高温の鉄の中の電子のスピンは熱運動のためにばらばらな方向を向いているので，鉄は特定の方向に磁化していない．つまり，回転対称である．ここで磁場をかけると，鉄は磁場の方向に磁化する．つまり，常磁性を示す．磁場をかけたまま温度を下げると，キュリー温度で常磁性体から強磁性体への相転移が起こり，それ以下の温度では磁場を取り去っても鉄は磁化したままで，永久磁石になる．したがって，高温での回転対称性は，キュリー温度以下では自発的に破れている．

ワインバーグとサラムの電弱統一理論では，電磁相互作用と弱い相互作用が統一されて電弱相互作用になるような電弱対称性が存在し，質量が 0 の 4 種類の「力を仲立ちする素粒子」のゲージボソン W^+，W^-，W^0，B^0 が存在する．しかし，後で説明するヒグス機構で電弱対称性が自発的に破れて，W^+ と W^- に大きな質量が生じて，弱い相互作用の荷電カレントのゲージボソンになる．そして，2 種類の中性のゲージボソン W^0 と B^0 が混合して，弱い相互作用の中性カレントのゲージボソンである質量の大きな Z^0 と，電磁相互作用のゲージボソンである質量が 0 の光子 γ^0 が生じる（図 7.21）．

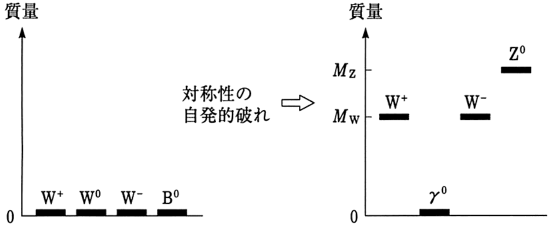


図 7.21　対称性の自発的な破れによるゲージボソンの変化

電弱対称性

電弱統一模型には，弱い荷電空間での回転対称性と弱い超電荷の保存という 2 つの対称性がある．

第 5 章で学んだように，核子とパイ中間子の相互作用は（現実の空間とは

無関係の仮想的な）荷電空間（アイソ空間）での回転で近似的に不変で，核子は荷電 2 重項，パイ中間子は荷電 3 重項である．電弱統一模型では，素粒子の相互作用は，アイソ空間とは別の荷電空間である**弱い荷電空間**での回転で不変である．この理論では，クォークとレプトンの左巻き成分は弱いアイソスピン $I^{\mathrm{w}} = 1/2$ の荷電 2 重項

$$l_{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix}, \quad l_{\mu} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu\mathrm{L}} \\ \mu_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad q_{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} \mathrm{u_L} \\ \mathrm{d'_L} \end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{7.17}$$

を作り，クォークとレプトンの右巻き成分 ν_{eR}，$\mathrm{e_R}$，$\nu_{\mu\mathrm{R}}$，μ_{R}，$\mathrm{u_R}$，$\mathrm{d'_R}$，…は $I^{\mathrm{w}} = 0$ の弱い荷電 1 重項である．ここで e，μ，u は，これまで ψ_{e}，ψ_{μ}，ψ_{u} と記してきた，電子，ミュー粒子，u クォークの場を表し，$\mathrm{e_L}, \mathrm{e_R}, \cdots$ は

$$\mathrm{e_L} = \frac{1-\gamma^5}{2}\mathrm{e}, \quad \mathrm{e_R} = \frac{1+\gamma^5}{2}\mathrm{e}, \quad \cdots$$

である．なお，d′ の定義については §9.3 で説明する．

電弱統一模型では，対称性が自発的に破れていない状態では，3 種類の W ボソン $\mathrm{W^+}$，$\mathrm{W^0}$，$\mathrm{W^-}$ が弱い荷電 3 重項を作り，そのほかに荷電 1 重項の $\mathrm{B^0}$ ボソンが存在する．対称性が自発的に破れていない状態では，すべてのレプトン，クォーク，ゲージボソンは質量が 0 である．弱いアイソスピンの保存則によって，$I^{\mathrm{w}} = 0$ のクォークやレプトンの右巻き成分は，$I^{\mathrm{w}} = 1$ の $\mathrm{W^+}$，$\mathrm{W^-}$ を放出したり，吸収したりすることができない．

さて，すべての基本粒子の（電気素量 e を単位にして測った）電荷 Q は，弱いアイソスピン I^{w} の第 3 成分 $I^{\mathrm{w}}{}_3$ および**弱い超電荷** Y^{w} を使って，

$$Q = I^{\mathrm{w}}{}_3 + \frac{1}{2}Y^{\mathrm{w}} \tag{7.18}$$

と表せる．表 7.2 に，基本粒子の I^{w}，$I^{\mathrm{w}}{}_3$ および Y^{w} を示す．

電磁場（4 元電磁ポテンシャル）と基本粒子の結合の強さが基本粒子の電荷 Qe であるように，$\mathrm{W^0}$ ボソンと基本粒子の結合の強さは基本粒子の $I^{\mathrm{w}}{}_3$ に比例する $I^{\mathrm{w}}{}_3 g_2$ であり，$\mathrm{B^0}$ ボソンと基本粒子の結合の強さは基本粒子の Y^{w} に比例する $Y^{\mathrm{w}} g_1$ である．このように理論を定式化すると，弱いアイソ

表 7.2　I^{W} と Y^{W}

粒　子	Q	I^{W}	I^{W}_3	Y^{W}
ν_{eL}, $\nu_{\mu L}$, $\nu_{\tau L}$	0	1/2	1/2	−1
e_L, μ_L, τ_L	−1	1/2	−1/2	−1
e_R, μ_R, τ_R	−1	0	0	−2
u_L	2/3	1/2	1/2	1/3
u_R	2/3	0	0	4/3
d'_L	−1/3	1/2	−1/2	1/3
d'_R	−1/3	0	0	−2/3
ϕ^+	1	1/2	1/2	1
ϕ^0	0	1/2	−1/2	1

スピンは保存し，弱い超電荷も保存する．ここで，g_1，g_2 は e に対応する結合定数である．

ところが，以下で説明する対称性の自発的な破れによって，弱いアイソスピンの保存と弱い超電荷の保存則は成り立たなくなり，質量をもたない 4 つのゲージボソン W^+，W^-，W^0，B^0 は図 7.21 に示したように変化する．

電弱対称性の自発的な破れとヒグス機構

2 つの実数のスカラー場 ϕ_1，ϕ_2 のポテンシャルエネルギーが

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\kappa[(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] + \frac{1}{4}\lambda[(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2]^2$$

（κ は実数，λ は正の実数）　(7.19)

の場合を考える．これは 1 つの複素数のスカラー場

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

のポテンシャルエネルギーが次の場合でもある．

$$V(\phi_1, \phi_2) = \kappa|\phi|^2 + \lambda(|\phi|)^2$$

（κ は実数，λ は正の実数）

(7.19)′

図 7.22 に示すように，V は ϕ_1 - ϕ_2 面内での回転対称性をもつ．$\kappa > 0$ の場合には，$\phi_1 = \phi_2 = 0$ は回転対称で安定なつり合い点である（図 (a)）．

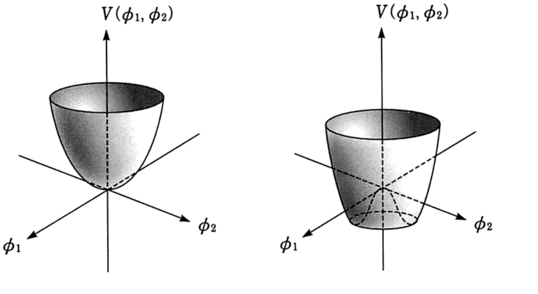


図 7.22　$V(\phi_1, \phi_2) = \dfrac{1}{2}\kappa[(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] + \dfrac{1}{4}\lambda[(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2]^2$　$(\lambda > 0)$

(a)　$\kappa > 0$ の場合，$\phi_1 = \phi_2 = 0$ は安定な極値

(b)　$\kappa < 0$ の場合，$\phi_1 = \phi_2 = 0$ は不安定な極値，$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 = v^2 = -\kappa/\lambda$ は安定な極値

$\kappa < 0$ の場合には $\phi_1 = \phi_2 = 0$ は不安定なつり合い点で，

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 = v^2 = -\frac{\kappa}{\lambda}$$

の点，つまり，

$$\phi_1 = v\sin\chi, \quad \phi_2 = v\cos\chi, \quad v = \sqrt{\frac{-\kappa}{\lambda}} \quad (0 \leqq \chi < 2\pi) \tag{7.20}$$

が，安定なつり合い点である．この場合，安定な状態は異なった χ の値に対応して無数に存在し，どの状態も ϕ_1 - ϕ_2 面内での回転対称性をもたず（図 (b)），ポテンシャルエネルギー (7.19) の対称性は自発的に破れている．

そこで，ワインバーグとサラムは，**ヒグスボソン**とよばれるスカラー粒子（スピンが 0 で，パリティが偶の粒子）の弱い荷電 2 重項 (ϕ^+, ϕ^0) を導入して，弱いアイソスピン対称性と超電荷の保存則がヒグスポテンシャル

$$V = \kappa[|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2] + \lambda[|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2]^2 \quad (\kappa < 0,\ \lambda > 0) \tag{7.21}$$

によって自発的に破れて，エネルギーが最小の状態ではヒグスボソンの場は

$$(\phi^+, \phi^0) = \left(0, \frac{v}{\sqrt{2}}\right) \tag{7.22}$$

であると考えた．つまり，素粒子がまったく存在しない真空状態でも，空間には一定な値 $v/\sqrt{2}$ のスカラー場が存在すると考えたのである．この値をヒグスボソンの場の真空期待値という．

電弱対称性が破れるまでは質量が 0 であった，クォーク，レプトン，ゲージボソンには，この一定値 $v/\sqrt{2}$ のスカラー場との相互作用によって，質量が生じる．W ボソン W^+，W^- の質量 m_W は

$$m_W c^2 = \frac{1}{2} g_2 v \tag{7.23}$$

である．W^0 の場と B^0 の場は混合して，質量 m_Z が

$$m_Z c^2 = \frac{1}{2} v\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2} \tag{7.24}$$

の Z ボソンの場

$$Z^0 = -\sin\theta_W\, B^0 + \cos\theta_W\, W^0 \tag{7.25}$$

と，質量が 0 の光子の場（4 元電磁ポテンシャル）

$$A^0 = \cos\theta_W\, B^0 + \sin\theta_W\, W^0 \tag{7.26}$$

になる．ここで，混合の度合を表す角 θ_W は**ワインバーグ角**とよばれ，

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}}, \qquad \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}} \tag{7.27}$$

で定義される．混合で生じた粒子 A^0 は基本粒子と基本粒子の $(I^W{}_3 + Y^W/2)$ の値に比例する強さで相互作用するので，A^0 を光子 γ^0 と同定してよいのである．ここで，電気素量 e は

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}} \tag{7.28}$$

と表される．

W ボソンの交換によって生じる弱い相互作用のポテンシャルとフェルミ

結合定数 G_F の正確な関係は

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{{g_2}^2\hbar^2}{8{m_W}^2c^2} = \frac{\hbar^2c^2}{2v^2} \tag{7.29}$$

である．したがって，フェルミ結合定数 G_F の正確な値を使うと，W ボソンの質量は

$$\begin{aligned}(m_Wc^2)^2 &= \frac{{g_2}^2v^2}{4} \\ &= \frac{e^2}{\sin^2\theta_W}\frac{\hbar^2c^2}{4\sqrt{2}\,G_F} \\ &= \left(\frac{37.2\,\mathrm{GeV}}{\sin\theta_W}\right)^2\end{aligned} \tag{7.30}$$

と表され，Z ボソンの質量は

$$\begin{aligned}m_Zc^2 &= \frac{1}{2}v\sqrt{{g_1}^2+{g_2}^2} \\ &= \frac{g_2v}{2\cos\theta_W} = \frac{m_Wc^2}{\cos\theta_W} \\ &= \frac{74.4\,\mathrm{GeV}}{\sin 2\theta_W}\end{aligned} \tag{7.31}$$

と表される．

$$\sin\theta_W = 0.481 \tag{7.32}$$

とすると，

$$m_W = 81\,\mathrm{GeV}/c^2, \qquad m_Z = 92\,\mathrm{GeV}/c^2$$

となるので，実験値をほぼ正確に再現する（わずかなずれは補正項の存在による）．理論が予想した質量をもつ W ボソンと Z ボソンの発見は，電弱統一模型の正しさを示している．

電弱統一模型では，クォークやレプトンの質量は，クォークやレプトンがヒグスボソンの場の真空期待値 $v/\sqrt{2}$ と湯川相互作用とよばれている相互作用をすることによって生じる．ただし，この相互作用の結合定数の値は理論的に予言できないので，クォークやレプトンの質量の値を理論的に説明で

きない．

最後に，ヒグスボソンが残っている．ヒグスボソンは正電荷の粒子と中性粒子の弱い荷電2重項 (ϕ^+, ϕ^0) であり，反粒子として，負電荷と中性のスカラー粒子の弱い荷電2重項 $(\bar{\phi}^0, \phi^-)$ が存在する．これらの4種類のスカラー粒子のうち，正電荷の粒子，負電荷の粒子，そして，2個ある中性粒子のうちの1種類の合計3種類は，もともとは質量が0なので縦方向を向いたスピン成分をもっていなかった W^+，W^-，Z^0 の，縦方向のスピン成分として吸収される．この機構を，発見者のヒグスにちなんで，**ヒグス機構**という．したがって，残るヒグスボソンは中性粒子の H^0 だけである．ヒグスボソン H^0 の質量も理論的に明確に予測することはできない．

さて，ウィークボソンは素粒子間の相互作用を仲立ちする．このとき，ウィークボソンを通じて素粒子間でエネルギーがやりとりされる．このエネルギーがウィークボソンの静止エネルギー $m_W c^2$，$m_Z c^2$ よりはるかに小さければ，この相互作用は弱い相互作用である．このエネルギーがウィークボソンの静止エネルギーと同程度以上であれば，この相互作用の強さは電磁相互作用と同程度になる．つまり，電弱相互作用である．

演習問題

［**1**］ 原子核のベータ崩壊が

$$\text{原子核 } N_1 \ \rightarrow\ \text{原子核 } N_2 + \text{電子 } e^-$$

という過程だとして，電子の運動エネルギーの値 K を相対論的に求めよ．

［**2**］ ハミルトン演算子（7.2）の hc の部分を場の演算子を使って書き表し，どのような過程を引き起こすかを説明せよ．

［**3**］（7.5），（7.6）の2つのポテンシャルの体積積分を等しいとおいて，（7.7）を証明せよ．

[**4**] スピンが0のケイ中間子の崩壊 $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ の終状態 $\pi^+ + \pi^0$ のパリティは偶（プラス）で，崩壊 $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ の終状態 $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ のパリティは奇（マイナス）であることを示せ．ただし，3個のパイ中間子の相対軌道角運動量は0であることがわかっている．

[**5**] (7.8) の hc の中で $\psi_e(\boldsymbol{r})$ は $(1-\gamma^5)\psi_e(\boldsymbol{r})$ という形で現れることを示せ．

[**6**] 次の反応のうち，起こるものを選べ．

（a）$\nu_e + n^0 \;\to\; p^+ + e^-$

（b）$\nu_e + p^+ \;\to\; n^0 + e^+$

（c）$\pi^- \;\to\; \mu^- + \bar{\nu}_e$

放射性淑女紳士への手紙

パウリ（1900 - 1958）は，1930年末に開催されたある会議の出席者たちに出した手紙の中で，ニュートリノ仮説を提唱した．この手紙のあらましを紹介しよう．

チューリッヒ　1930年12月4日

親愛なる放射性淑女紳士諸君

この手紙の配達人のいうことに耳を傾けて頂きたい．配達人は諸君に「私はエネルギーと角運動量の保存則を救うための絶望的な救済法を考えついた」と発表するだろう．この救済法とは「スピンが1/2で電気的に中性の粒子が原子核の内部に存在する」という可能性である．この中性の粒子の質量は電子の質量と同じくらいで，陽子の質量の1/100以上ではありえない．ベータ崩壊の際には電子1個とニュートリノ1個が放出され，電子とニュートリノの運動エネルギーの和が一定であると仮定すれば，放出された電子の運動エネルギーの問題は理解できよう．

もしニュートリノが存在すれば，とっくに発見されているはずなので，私の救済法が非現実的だという点は認める．しかし「虎穴に入らないと虎児は得られない」．

エネルギー保存則の破れによる事情の深刻さは，私の前任者がブラッセルで私にいわれた次の言葉によって明らかだろう．

「新しい税金の場合と同じように，考えないことがベストなのだ．」

そこで，すべての可能な救済法を真剣に議論すべきである．

放射性諸君，私の提案を調べて判断してほしい．

W. パウリ

この手紙の受取人の放射性淑女とはマイトナー博士である．理論的困難の解決のために新しい素粒子を導入した最初の理論物理学者が，パウリ博士で，第2の理論物理学者が，パイ中間子を1935年に導入した湯川博士である．

8 ハドロンとクォーク

約 30 GeV 以下の陽子加速器を使用して素粒子実験を行うときに起こる素粒子の生成や崩壊を引き起こす相互作用は，電磁相互作用，強い相互作用と弱い相互作用であることを，これまでの章で学んだ．

強い相互作用を行う素粒子を**ハドロン**という．強い粒子という意味である．陽子，中性子，反陽子，反中性子，パイ中間子などはハドロンである．

陽子と反陽子以外のハドロンはすべて不安定で崩壊する．最終的な崩壊生成物は，(1) 陽子を 1 個含む場合，(2) 反陽子を 1 個含む場合，(3) 陽子も反陽子も含まない場合，の 3 つの場合がある．第 1 の場合は素粒子のバリオン数を 1 と定義し，このような素粒子を**バリオン**という．第 2 の場合は素粒子のバリオン数を -1 と定義し，このような素粒子を反バリオンという．バリオンと反バリオンの両方をバリオンと総称することも多い．第 3 の場合は素粒子のバリオン数を 0 と定義し，このような素粒子を**メソン**という．このようにハドロンの**バリオン数**を定義し，強い相互作用をしない素粒子のレプトンや基本的相互作用を仲立ちする素粒子のゲージボソンのバリオン数を 0 とすると，あらゆる素粒子現象でバリオン数が保存することが経験的に知られている．これを**バリオン数の保存則**という．

バリオンはスピンが半奇数 1/2，3/2，… のフェルミオンであり，メソンはスピンが整数 0，1，2，… のボソンである．このようにして，ハドロンはバリオンとメソンに分類されることになった．

現在までに数百種類のハドロンが発見されているので，ハドロンは物質構造の究極粒子ではなく，クォークとよばれる基本粒子から構成された複合粒子だと考えられている．クォークには 6 種類のフレーバー（香り）と 3 種類のカラー（色）がついている．本章では，ハドロンのクォーク模型を学ぶ．

§8.1 奇妙な粒子とストレンジネス（奇妙さ）

1950年前後から，宇宙線や陽子加速器による実験で，表8.1に示す，ケイ中間子K^+，K^0，$\overline{K}^0$，K^-，ラムダ粒子Λ^0，シグマ粒子Σ^+，Σ^0，Σ^-，グザイ粒子Ξ^0，Ξ^-などの新しい粒子が次々に発見された．これらの粒子は，作られやすいのに崩壊しにくいという特徴があり，奇妙な性質をもつ粒子だというので，**奇妙な粒子**（strange particles）とよばれるようになった．

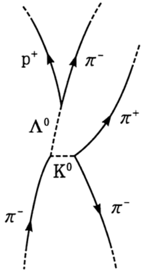


図8.1 奇妙な粒子K^0とΛ^0のペアの生成と崩壊

図8.1に示す，液体水素の中に入射されたエネルギーが2 GeVの負電荷のパイ中間子π^-が引き起こした

$$\pi^- + p^+ \ \rightarrow \ K^0 + \Lambda^0$$

表8.1 代表的な素粒子

素粒子	記号	質量	Q	B	S	J
陽　子	p^+	938	1	1	0	1/2
中性子	n^0	940	0	1	0	1/2
ラムダ粒子	Λ^0	1116	0	1	−1	1/2
シグマ粒子	Σ^+	1189	1	1	−1	1/2
	Σ^0	1193	0	1	−1	1/2
	Σ^-	1197	−1	1	−1	1/2
グザイ粒子	Ξ^0	1315	0	1	−2	1/2
	Ξ^-	1321	−1	1	−2	1/2
パイ中間子	π^+	140	1	0	0	0
	π^0	135	0	0	0	0
	π^-	140	−1	0	0	0
ケイ中間子	K^+	494	1	0	1	0
	K^0	498	0	0	1	0
	$\overline{K}^0$	498	0	0	−1	0
	K^-	494	−1	0	−1	0
エータ中間子	η^0	548	0	0	0	0

電荷の単位は電気素量eで，質量の単位は$1\,\mathrm{MeV}/c^2 = 1.782 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$である．平均寿命と主な崩壊先については付録Aを参照．
（Q：電荷，B：バリオン数，S：ストレンジネス，J：スピン）

という K^0 と Λ^0 の生成反応と，生成された K^0 と Λ^0 の

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \qquad \Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p^+$$

という崩壊反応について考察しよう．

核力の到達距離は約 10^{-15} m なので，核子の広がり r は $r \sim 10^{-15}$ m で，広がった核子の断面積は $\pi r^2 \sim$ 約 3×10^{-30} m^2 だと推測される．ところで，π^- と p^+ の衝突断面積は約 30 mb $= 3 \times 10^{-30}$ m^2 なので，光速（$c = 3 \times 10^8$ m/s）に近い速さで飛ぶパイ中間子が核子の中を通り抜ける時間（約 10^{-23} 秒間）に，パイ中間子と核子は反応し合う．この衝突でいろいろな反応生成物ができるが，約 1％の確率で $\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ 反応が起こる．つまり，10^{-23} 秒の 100 倍の約 10^{-21} 秒の間に，強い相互作用によって K^0 と Λ^0 は作られる．したがって，K^0 と Λ^0 はパイ中間子や核子と同じように強い相互作用をするハドロンである．

このようにして約 10^{-21} 秒間に作られた K^0 は平均寿命 0.89×10^{-10} 秒で 2 個のパイ中間子に崩壊し，Λ^0 は平均寿命 2.63×10^{-10} 秒で核子とパイ中間子に（素粒子の世界の時間感覚では）ゆっくりと崩壊する．崩壊する K^0 と Λ^0，崩壊生成物のパイ中間子と核子は，すべて強い相互作用をするハドロンである．それなのに，生成時間と崩壊時間に $1 : 10^{11}$ という大きな違いがあるのは奇妙な感じがするというのが，奇妙な粒子の語源である．

この謎は，1953 年に中野董夫と西島和彦，ゲルマンが独立に提案した「素粒子は電荷とバリオン数のほかに**ストレンジネス**（奇妙さ）というもう 1 つの量（荷電）を帯びていて，**ストレンジネスを保存する反応だけが強い相互作用および電磁相互作用によって引き起こされる**．しかし，すべての相互作用で保存するバリオン数や電荷とは異なり，**弱い相互作用による反応ではストレンジネスは保存しない**」というストレンジネスの導入によって解決された．

図 8.1 の

$$\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

反応では始状態と終状態の電荷 Q，バリオン数 B，ストレンジネス S の値がそれぞれ 0，1，0 で，Q も B も S も保存しているので，この反応は Q，B，S の 3 つの保存則のすべてによって許される．

ところが，

$$\Lambda^0 \quad \to \quad \pi^- + \mathrm{p}^+$$

崩壊では，始状態の Q，B，S の値は 0，1，－1 なのに終状態の Q，B，S の値は 0，1，0 なので，Q と B は保存しているが，S は 1 だけ変化している．したがって，この崩壊はストレンジネスを保存する強い相互作用によっては起こらず，ストレンジネスの保存則をわずかだけ破る弱い相互作用によって起こる．

例 1． 次の反応は Q, B, S の 3 つの保存則のすべてによって許される．

$$\mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+ \quad \to \quad \mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+, \qquad \mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+ \quad \to \quad \pi^0 + \Lambda^0,$$

$$\mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+ \quad \to \quad \pi^- + \Sigma^+, \qquad \mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+ \quad \to \quad \pi^0 + \Sigma^0,$$

$$\mathrm{K}^- + \mathrm{p}^+ \quad \to \quad \pi^+ + \Sigma^-$$

例 2． 次の崩壊はストレンジネスの保存則を破るので，強い相互作用ではなく，弱い相互作用で起こる．

$$\mathrm{K}^- \quad \to \quad \pi^- + \pi^0, \qquad \mathrm{K}^- \quad \to \quad \pi^- + \pi^- + \pi^+,$$

$$\Lambda^0 \quad \to \quad \pi^0 + \mathrm{n}^0, \qquad \Sigma^- \quad \to \quad \pi^- + \mathrm{n}^0$$

このようにして，ハドロンは，質量とスピン J，電荷，バリオン数，ストレンジネス（奇妙さ，記号 S）などで分類されることになる．なお，ある素粒子の電荷が Q，バリオン数が B，ストレンジネスが S の場合，この素粒子の反粒子の電荷は $-Q$，バリオン数は $-B$，ストレンジネスは $-S$ である．$S = -1$ で中性のケイ中間子である $\overline{\mathrm{K}}^0$ は，$S = 1$ で中性のケイ中間子である K^0 の反粒子で，互いに異なる粒子である．

陽子 p^+ と中性子 n^0 がアイソスピン $I = 1/2$ の荷電 2 重項であるように，ケイ中間子 K^+ と K^0，グザイ粒子 Ξ^0 と Ξ^- も $I = 1/2$ の荷電 2 重項である．

また，パイ中間子 π^+，π^0，π^- がアイソスピン $I = 1$ の荷電 3 重項であるように，Σ^+，Σ^0，Σ^- も $I = 1$ の荷電 3 重項である．Λ^0 は $I = 0$ の荷電 1 重項である．

表 8.1 を見ると，1 つの荷電多重項に属するハドロンの電荷 Q（単位は電気素量 e）は

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) \tag{8.1}$$

（I_3：アイソスピンの第 3 成分）という関係を満たすことがわかる．

$$Y = B + S \tag{8.2}$$

を，この荷電多重項の**超電荷**（hypercharge）という．

弱い相互作用によって奇妙な粒子がハドロンに崩壊する場合に，電荷 Q とバリオン数 B は保存するが，ストレンジネス S は 1 だけ変化するので，I_3 も 1 だけ変化する．したがって，アイソスピンは弱い相互作用による反応では保存せず，強い相互作用による反応では保存するが，電磁相互作用による反応では I_3 だけが保存する．

§8.2　ハドロンの超多重項

表 8.1 からわかるように，8 種類のバリオン p^+，n^0，Λ^0，Σ^+，Σ^0，Σ^-，Ξ^0，Ξ^- は，

(1)　バリオン数が 1 のバリオン

(2)　スピンは 1/2

(3)　強い相互作用で崩壊しない

(4)　質量の大きさがそれほど違わない

という共通の性質をもつ．そこで，このスピン 1/2 の 8 個のバリオンの組を，スピン 1/2 のバリオンの**超多重項**あるいは 8 重項（octet）という．超多重項は，アイソスピンの荷電多重項を拡張した考えである．

一方，8 種類のメソン π^+，π^0，π^-，η^0，K^+，K^0，$\overline{\mathrm{K}}{}^0$，$\mathrm{K}^-$ は，すべて

(1)　バリオン数が 0 のメソン

(2)　スピンは 0，パリティは奇の擬スカラー

(3)　強い相互作用で崩壊しない

(4)　質量はほかのハドロンより軽い

という共通の性質をもつ．そこで，このスピン 1/2 の 8 個のメソンの組を，

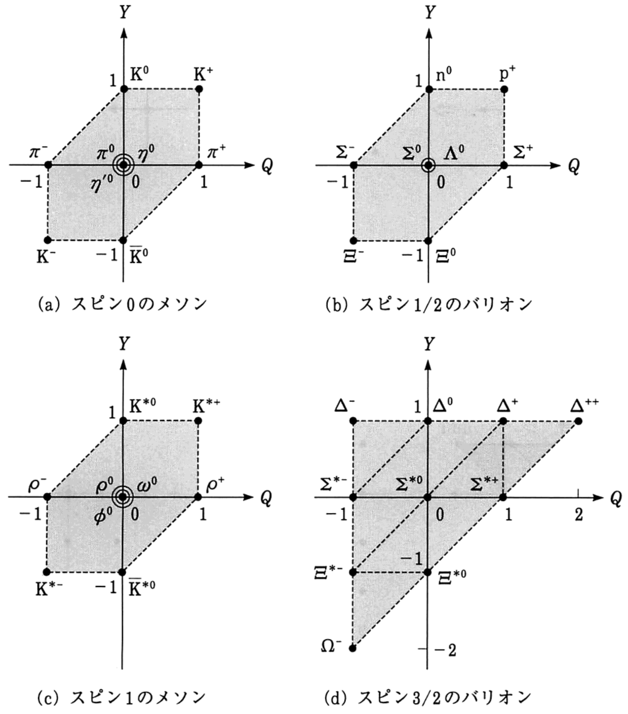


図 8.2　規則正しい図形上にのるハドロンの超多重項．縦軸に超電荷 Y，横軸に電荷 Q（単位は電気素量 e）をとったグラフの上にハドロンをのせると，ハドロンの超多重項はすべて図のような 6 角形か 3 角形の上に並ぶ．2 重丸は 2 つの粒子，3 重丸は 3 つの粒子の重なりを表す．(a) と (c) では 9 個の粒子がグループを作っている．これは数学的には 8 重項と 1 重項の組合せとみることができる．

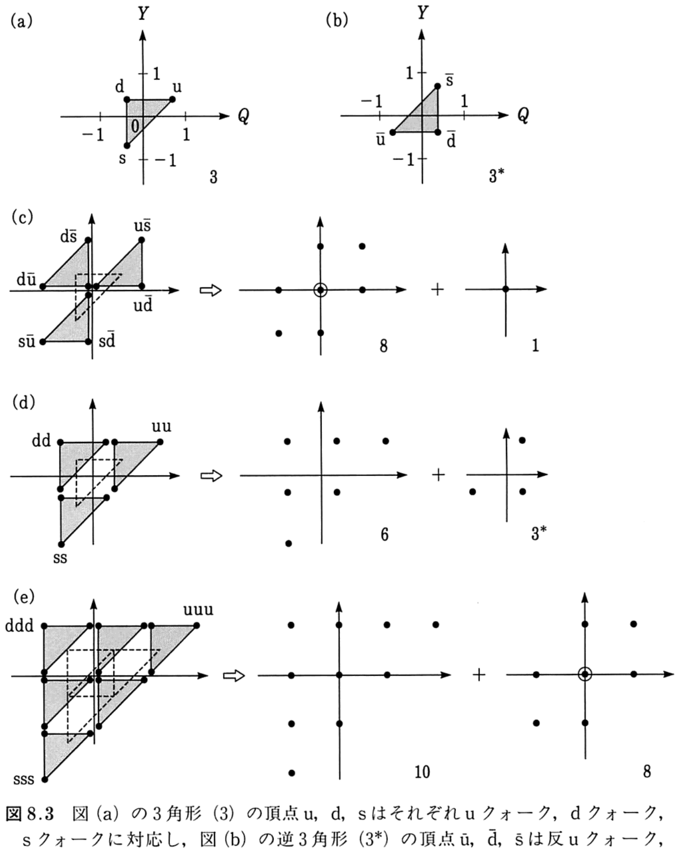


図8.3　図(a)の3角形(3)の頂点u，d，sはそれぞれuクォーク，dクォーク，sクォークに対応し，図(b)の逆3角形(3*)の頂点ū，d̄，s̄は反uクォーク，反dクォーク，反sクォークに対応する．クォークの3角形と反クォークの逆3角形の「掛け算」で合成された図(c)の6角形の図形上の9つの頂点は，図8.2(a)，(c)のメソンの9重項(8重項+1重項)に対応している．この図から，9個のメソンの構成粒子がわかる．図(d)は，図(a)のクォークの3角形(3)の2個の「掛け算」で3角形(6)と逆3角形(3*)が作られ，図(e)はこの3角形(6)と図(a)の3角形(3)から，バリオンの10重項に対応する大きな3角形(10)とバリオンの8重項に対応する6角形(8)が作られることを示す．

擬スカラーメソンの8重項という．

ハドロンの代表的な超多重項として，このほかにスピン3/2のバリオンの10重項とベクトルメソン（スピンが1，パリティが奇のメソン）の9重項がある．

そこで横軸に電荷 Q，縦軸に超電荷 Y を選んで，図8.2に上の4つの超多重項のハドロンを記すと，6角形あるいは3角形の上に規則正しく並ぶことがわかる．これは，ハドロンには構造があることを示唆する．

この配列の数学はリー群であり，具体的には $SU(3)$ 群の表現である．図8.2の配列は，図8.3(a)の3角形と(b)の逆3角形から，第1の図形の頂点に第2の図形の中心をのせるという「掛け算」で作ることができる（図8.3参照）．

§8.3　ハドロンのクォーク模型

この $SU(3)$ 群に基づいたハドロンの模型が，1964年にゲルマンとツバイクが提案した

「ハドロンはuクォーク，dクォーク，sクォークの3種類のクォークとその反粒子（反クォーク）から構成されている」

という，**クォーク模型**である．スピン1/2のフェルミオンである3種類のクォーク（u, d, s）とその反粒子（ū, d̄, s̄）の性質を表8.2に示す．(u, d, s) は

表8.2　クォーク（最初の3種類のクォーク）

クォーク	Q	B	I	I_3	S	
u	2/3	1/3	1/2	1/2	0	アップクォーク
d	−1/3	1/3	1/2	−1/2	0	ダウンクォーク
s	−1/3	1/3	0	0	−1	ストレンジクォーク
ū	−2/3	−1/3	1/2	−1/2	0	反アップクォーク
d̄	1/3	−1/3	1/2	1/2	0	反ダウンクォーク
s̄	1/3	−1/3	0	0	1	反ストレンジクォーク

電荷の単位は電気素量 e である．

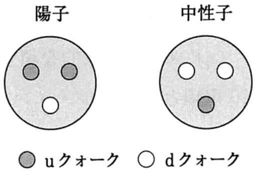


図 8.4　クォーク模型での核子
(a)　陽子の構成は uud
(b)　中性子の構成は udd

図 8.3(a) の 3 角形に対応し，$(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ は図 8.3(b) の 3 角形に対応する．なお，u，d，s は up，down，strange の略である．クォークは電気素量 e の 2/3 倍や −1/3 倍の半端な電荷をもつのが特徴である．

クォーク模型では，図 8.4 に示すように，陽子は u クォーク 2 個と d クォーク 1 個から構成された複合体で，中性子は u クォーク 1 個と d クォーク 2 個から構成された複合体である（次項参照）．なお，クォーク（quark）はもともとは「鳥の鳴き声」を意味する単語で，ゲルマンが命名した．

クォークには，u クォーク，d クォーク，s クォークなどの種類があることを，クォークには**フレーバー**（香り）があるという．クォークの香りといっても，もちろんクォークが匂うわけではない．

クォーク模型でのハドロンの多重項

クォーク模型によれば，バリオン数が 0 のメソンは，バリオン数が 1/3 のクォーク $q = (u, d, s)$ とその反粒子でバリオン数が −1/3 の反クォーク $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ の複合粒子 $q\bar{q}$ である．たとえば，正電荷のパイ中間子 π^+ は u クォークと反 d クォークの複合粒子 $u\bar{d}$ で，π^- は d クォークと反 u クォークの複合粒子 $d\bar{u}$ だと仮定すれば，

	$\pi^+ \sim u\bar{d}$	$\pi^- \sim d\bar{u}$
電　荷	$1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$	$-1 = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)$
バリオン数	$0 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)$	$0 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)$
ストレンジネス	$0 = 0 + 0$	$0 = 0 + 0$

という具合に，パイ中間子の性質が説明できる．

また，バリオン数が 1 のハドロンのバリオンは，クォークのバリオン数が

1/3 なので，クォーク 3 個の複合粒子 qqq である．たとえば，陽子 p^+ は u クォーク 2 個と d クォーク 1 個の複合粒子 uud で，中性子 n^0 は d クォーク 2 個と u クォーク 1 個の複合粒子 udd である．このように仮定すると，陽子や中性子の性質が説明できる．

	$p^+ \sim \mathrm{uud}$	$n^0 \sim \mathrm{udd}$
電　荷	$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)$	$0 = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$
バリオン数	$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$
ストレンジネス	$0 = 0 + 0 + 0$	$0 = 0 + 0 + 0$

このようにクォーク模型は，陽子，中性子，パイ中間子などのメソンとバリオン，すなわち，ハドロンの模型として魅力的である．

クォーク模型では，ハドロンのスピンとパリティがどのように予言されるかを考えてみよう．

メ ソ ン

クォーク模型では，メソンはクォーク 1 個と反クォーク 1 個から構成された複合粒子である．このような複合粒子のうちでエネルギーの低い状態は，2 粒子の相対運動の軌道角運動量 L が 0 の S 状態であると考えられる．クォークと反クォークのスピンが 1/2 だとすると，メソンのスピン J は

$$\frac{1}{2}\text{ と }\frac{1}{2}\text{ を合成して得られる } 0 \text{ と } 1 \tag{8.3}$$

なので，質量の軽いメソンのスピンは 0 か 1 だと予想される．クォークのスピンと反クォークのスピンが逆向きの場合にはメソンのスピンは 0 で，同じ向きの場合にはメソンのスピンは 1 である．

ディラック粒子の場合，粒子のパリティとその反粒子のパリティは逆符号なので（$P_{\bar{q}} = -P_q$）（§6.7 参照），$L = 0$ のメソンのパリティ P は

$$P = P_q P_{\bar{q}} (-1)^L = -1 \tag{8.4}$$

である．

$J^P = 0^-$（スピンが 0 でパリティが -1）の粒子を擬スカラー粒子，$J^P = 1^-$ の粒子をベクトル粒子というので，**クォーク模型で予想される軽いメソンは**，$\mathrm{u\bar{u}}$，$\mathrm{u\bar{d}}$，$\mathrm{u\bar{s}}$，$\mathrm{d\bar{u}}$，$\mathrm{d\bar{d}}$，$\mathrm{d\bar{s}}$，$\mathrm{s\bar{u}}$，$\mathrm{s\bar{d}}$，$\mathrm{s\bar{s}}$ の $3 \times 3 = 9$ 通りの組合せに対応する，**9 種類の擬スカラーメソンと 9 種類のベクトルメソンである．** 実験では，図 8.2(a) に示した擬スカラーメソンの

$$8\text{ 重項 } \pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-,\ \eta^0,\ \mathrm{K}^+,\ \mathrm{K}^0,\ \overline{\mathrm{K}}{}^0,\ \mathrm{K}^- \quad \text{と} \quad 1\text{ 重項 } \eta'^0$$

および図 8.2(c) に示したベクトルメソンの 9 重項（8 重項 + 1 重項）

$$\rho^+,\ \rho^0,\ \rho^-,\ \mathrm{K}^{*+},\ \mathrm{K}^{*0},\ \overline{\mathrm{K}}{}^{*0},\ \mathrm{K}^{*-},\ \omega^0,\ \phi^0$$

が発見されていて，理論の予想は実験結果によって見事に満たされている．

バリオン

バリオンを構成する 3 個のクォークの相対運動の軌道角運動量が 0 だとすると，3 個のクォークの束縛状態としてのバリオンのスピン J は

$$\frac{1}{2}\text{ と }\frac{1}{2}\text{ と }\frac{1}{2}\text{ を合成して得られる }\frac{3}{2}\text{ と }\frac{1}{2}\text{ と }\frac{1}{2}$$

である．そこで，クォーク模型で予想される軽いバリオンは，uuu，uud，uus，…，uss，duu，dud，…，dss，…，ssd，sss の $3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りの組合せに対応する，27 種類のスピン 3/2 のバリオン 1 組と 27 種類のスピン 1/2 のバリオン 2 組である．実験では，質量の軽いバリオンとしては，図 8.2(d) に示した，スピンが同じ方向を向いた 3 個のクォークが結合したスピン 3/2 のバリオンの 10 重項

$$\Delta^{++},\ \Delta^+,\ \Delta^0,\ \Delta^-,\ \Sigma^{*+},\ \Sigma^{*0},\ \Sigma^{*-},\ \Xi^{*0},\ \Xi^{*-},\ \Omega^-$$

と，図 8.2(b) に示した，スピンが 1/2 のバリオンの 8 重項

$$\mathrm{p}^+,\ \mathrm{n}^0,\ \Lambda^0,\ \Sigma^+,\ \Sigma^0,\ \Sigma^-,\ \Xi^0,\ \Xi^-$$

が発見されていて，クォーク模型の予想との一致は部分的である．実験結果との不一致は，次節で説明するクォークのもつ新しい自由度である，色の自由度で説明がつく．

ハドロンの質量とクォークの質量

スピンとストレンジネスが等しく，含まれている「u あるいは $\bar{\mathrm{u}}$ クォーク数」＋「d あるいは $\bar{\mathrm{d}}$ クォーク数」が等しいメソンやバリオンの質量には

$$\left.\begin{aligned}
&m(\pi^+) = m(\pi^-) \fallingdotseq m(\pi^0) \\
&m(\mathrm{K}^+) = m(\mathrm{K}^-) \fallingdotseq m(\mathrm{K}^0) = m(\overline{\mathrm{K}}^0) \\
&m(\rho^+) = m(\rho^-) \fallingdotseq m(\rho^0) \\
&m(\mathrm{K}^{*+}) = m(\mathrm{K}^{*-}) \fallingdotseq m(\mathrm{K}^{*0}) = m(\overline{\mathrm{K}}^{*0}) \\
&m(\mathrm{p}^+) \fallingdotseq m(\mathrm{n}^0), \qquad m(\Sigma^+) \fallingdotseq m(\Sigma^0) \fallingdotseq m(\Sigma^-) \\
&m(\Xi^0) \fallingdotseq m(\Xi^-), \qquad m(\Delta^{++}) \fallingdotseq m(\Delta^+) \fallingdotseq m(\Delta^0) \fallingdotseq m(\Delta^-) \\
&m(\Sigma^{*+}) \fallingdotseq m(\Sigma^{*0}) \fallingdotseq m(\Sigma^{*-}) \\
&m(\Xi^{*0}) \fallingdotseq m(\Xi^{*-})
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

などの関係がある．これらの関係は，u クォークの質量 m_u と d クォークの質量 m_d がほぼ等しく，

$$m_\mathrm{u} \fallingdotseq m_\mathrm{d} \tag{8.6}$$

であることを示唆する．ただし，中性子の質量は陽子の質量よりわずかではあるが大きいので，d クォークの質量 m_d は u クォークの質量 m_u よりわずかではあるが大きいと考えられている．

スピン 3/2 のバリオンの質量の実験値には

$$\begin{aligned}
m(\Omega) - m(\Xi^*) &\fallingdotseq m(\Xi^*) - m(\Sigma^*) \\
&\fallingdotseq m(\Sigma^*) - m(\Delta) \fallingdotseq 147\,\mathrm{MeV}/c^2
\end{aligned} \tag{8.7}$$

という関係がある（第 1, 第 2, 第 3 項の実験値は 139 MeV/c^2, 149 MeV/c^2, 152 MeV/c^2）．ハドロンの質量は構成するクォークの質量の和に近似的に等しいと考えると，これらの関係は，3 種類のクォーク u，d，s の質量の間に，

$$m_\mathrm{s} - m_\mathrm{u} \fallingdotseq m_\mathrm{s} - m_\mathrm{d} \fallingdotseq 150\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{8.8}$$

という関係が存在することを示唆する．

ベクトルメソンの質量の実験値には

$$m(\phi^0) - m(\mathrm{K}^*) \fallingdotseq m(\mathrm{K}^*) - m(\omega^0) \fallingdotseq 120\,\mathrm{MeV}/c^2 \qquad (8.9)$$

という関係がある（第1，第2項の実験値は $126\,\mathrm{MeV}/c^2$，$112\,\mathrm{MeV}/c^2$）．

ファイ中間子 ϕ^0 の構成が $\mathrm{s\bar{s}}$ で，オメガ中間子 ω^0 の構成が $(\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}})/\sqrt{2}$ だとすると，関係（8.9）もクォークの質量の関係（8.8）の根拠になる．なお，中性のロー中間子 ρ^0 の構成は $(\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})/\sqrt{2}$ であり，予想されるように $m(\rho^0) \fallingdotseq m(\omega^0)$ である．

スピン1/2のバリオンについては，uクォーク，dクォーク，sクォーク各1個から構成されている2つのバリオン Σ^0 と Λ^0 が存在し，その質量 m_Σ，m_Λ は等しくなく，$m_\Sigma - m_\Lambda = 77\,\mathrm{MeV}/c^2$ という大きな質量差があることが注目される．Σ^0 と Λ^0 の構造の差は，uクォークとdクォークのスピンの向きが Σ^0 の場合は同じ向きで，Λ^0 の場合は逆向きだということである（演習問題［6］）．したがって，Σ^0 と Λ^0 の質量差の原因は，クォークの間にはたらく力の大きさがスピンの向きによって異なるためだと考えられている．

§8.4　クォークのカラー（色）

ハドロンは3種類のクォーク u，d，s で構成されているというクォーク模型は，メソンについては成功を収めたが，バリオンについては不満足であった．たとえば，スピン3/2のバリオンの Δ^{++} はスピンの z 成分が3/2の場合には，スピンが上向きの3個のuクォークから構成されているはずである（$\mathrm{u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow}$）．ところが，スピン1/2のクォークはパウリ原理に従うため，スピンが上向きという同じ状態にuクォークが3個存在することはできない．

この困難の解決のため，クォークにはもう1つ別の自由度があるという提案がなされた．3種類のクォークのおのおのに，

赤(R)，　緑(G)，　青(B)

の3つの**カラー**（**色**）があって，クォークには，

$$u^R,\ u^G,\ u^B,\ d^R,\ d^G,\ d^B,\ s^R,\ s^G,\ s^B$$

の9種類があるというのである．そうすると，スピンの z 成分が3/2のΔ^{++}粒子の構成は $u^R{}_\uparrow u^G{}_\uparrow u^B{}_\uparrow$ となって，パウリ原理とは矛盾しなくなる．なお，同じフレーバーでカラーの異なるクォークは，スピン，質量，電荷，バリオン数，ストレンジネスなどがすべて等しい．

赤クォークの反粒子のカラーは赤の補色の藍，緑クォークの反粒子のカラーは緑の補色の赤紫，青クォークの反粒子のカラーは青の補色の黄だとして，これらのカラーをそれぞれ，反赤（$\overline{R}$），反緑（$\overline{G}$），反青（$\overline{B}$）とよぶ．

さて，3種類のカラーがクォークについているとすると，クォーク模型で予想されるハドロンの種類が多くなりすぎる可能性がある．たとえば，正電荷のパイ中間子 π^+ が u クォークと反 d クォークの複合粒子 $u\bar{d}$ だとすると，カラーがついている場合には，$u^R\bar{d}_R$，$u^R\bar{d}_G$，$u^R\bar{d}_B$，$u^G\bar{d}_R$，$u^G\bar{d}_G$，$u^G\bar{d}_B$，$u^B\bar{d}_R$，$u^B\bar{d}_G$，$u^B\bar{d}_B$ などのカラーの異なる9種類の正電荷のパイ中間子が存在することになって困る（カラー添字の上下で原色と補色を区別した）．

この困難を避けるために，現実に観測されるハドロンはすべてが白色のものに限られると考える．3原色（赤，緑，青）とその補色（反赤，反緑，反青）から白色を作る方法には，次の（1），（2），（3）の3つがある．

（1）　赤，緑，青を等量ずつ混ぜる（陽子，中性子などのバリオンの場合）．

白色の場合，3個のクォークのカラーの波動関数は

$$\psi_{\text{color}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\text{RGB} - \text{RBG} + \text{GBR} - \text{GRB} + \text{BRG} - \text{BGR}) \tag{8.10}$$

だとする．ここで，RGBは第1のクォークのカラーがR，第2のクォークのカラーがG，第3のクォークのカラーがBである場合を表す．

波動関数（8.10）は2個のクォークの入れ換えで反対称，つまり，入れ換える前の式の －1倍になるので，3個のクォークの波動関数のフレーバー，

スピン，相対座標の部分は２個のクォークの入れ換えで対称，つまり，入れ換える前の式のままであることがパウリ原理から要求される．３個のクォークの相対運動の軌道角運動量が０だとすると，クォーク模型で予想される白色の軽いバリオンは，図 8.2(b) のスピン 1/2 のバリオンの８重項と図 8.2(d) のスピン 3/2 のバリオンの 10 重項だけであることが示される（演習問題［５］参照）．

(2)　反赤，反緑，反青を等量ずつ混ぜる（反陽子，反中性子などの場合）．

(3)　原色と補色を等量ずつ混ぜる（パイ中間子などのメソンの場合）．

この場合，クォークと反クォークのカラーの波動関数は

$$\psi_{\mathrm{color}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{R\overline{R}} + \mathrm{G\overline{G}} + \mathrm{B\overline{B}}) \qquad (8.11)$$

このように，クォークには３種類のカラーがついているが，実際に観測されるハドロンは白色のものに限られるとすると，質量が軽いハドロンは図 8.2 に示したものだけになるので，クォーク模型の予想は実験結果と完全に一致する．

§8.5　QCD（量子色力学）

グルオンと QCD（量子色力学）

クォーク模型が成功すると，クォークを探す実験が始まった．クォークを探す最大の手掛かりは，クォークのもつ $2e/3, -e/3$ などの「半端な電荷」である．荷電粒子が物質中を通過するときには物質をイオン化してエネルギーを失うが，このイオン化によるエネルギー損失量は，通過する荷電粒子の電荷の２乗に比例する．この手掛かりを使ってクォーク探しが精力的に行われてきたが，加速器による実験では，「半端な電荷」をもつ荷電粒子は１個も発見されていない．

そこで，クォークはハドロンの中に存在するが，ハドロンの中に閉じ込め

られていて，ハドロンの外には単独では出てこないと考えられている．このことは，クォーク間にはたらく強い相互作用は，遠方では距離 r の2乗に反比例して弱くなっていくクーロン力や重力とは異なり，2つのクォークが遠く離れても弱くならないことを意味する．一方，これまで説明した簡単なクォーク模型がハドロンに関する実験事実を定性的に説明できることは，クォークの間にはたらく強い相互作用は近距離になると比較的に弱くなることを示唆する．このように，強い相互作用が近距離になると弱くなる性質を**漸近的自由性**という．クォークの閉じ込めと近距離での漸近的自由性を説明できる理論が，強い相互作用の**QCD**（Quantum Chromodynamics，量子色力学）である．

2物体間にはたらく万有引力の強さは2物体の質量の積に比例し，2物体間にはたらく電気力の強さは2物体の電荷の積に比例する．つまり，万有引力の源は質量（厳密にはエネルギー）で，電気力の源は電荷である．それでは，クォークの間にはたらく強い相互作用の源は何だろうか．それは**カラー荷電**である．電磁相互作用がゲージボソンの光子によって媒介されるように，強い相互作用はゲージボソンの**グルオン**によって媒介される．

光子は電荷を帯びていないが，グルオンはカラー荷電を帯びている．グルオンは，3原色R，G，Bのうちの1つと3補色 $\overline{\mathrm{R}}$，$\overline{\mathrm{G}}$，$\overline{\mathrm{B}}$ のうちの1つを帯びている．しかし，$\mathrm{R\overline{R}}$，$\mathrm{R\overline{G}}$，$\mathrm{R\overline{B}}$，$\mathrm{G\overline{R}}$，$\mathrm{G\overline{G}}$，$\mathrm{G\overline{B}}$，$\mathrm{B\overline{R}}$，$\mathrm{B\overline{G}}$，$\mathrm{B\overline{B}}$ という9通りの組合せのうち，(8.11) で示したように，3原色とその補色を等量ずつ含む $(\mathrm{R\overline{R}}+\mathrm{G\overline{G}}+\mathrm{B\overline{B}})/\sqrt{3}$ は白色なので，色を帯びたグルオンには

$$\mathrm{R\overline{G}},\ \mathrm{R\overline{B}},\ \mathrm{G\overline{R}},\ \mathrm{G\overline{B}},\ \mathrm{B\overline{R}},\ \mathrm{B\overline{G}},\ \frac{\mathrm{R\overline{R}}-\mathrm{G\overline{G}}}{\sqrt{2}},\ \frac{\mathrm{R\overline{R}}+\mathrm{G\overline{G}}-2\,\mathrm{B\overline{B}}}{\sqrt{6}}$$

の8種類が存在する．

図8.5に示すように，カラーのついたクォーク，たとえば $\mathrm{u^R}$ は，$\mathrm{R\overline{G}}$ グルオンを放出あるいは $\mathrm{G\overline{R}}$ グルオンを吸収して $\mathrm{u^G}$ クォークになる．陽子を

構成する3個のクォークは，赤，緑，青を等量ずつ含み，その結果として白色であるが，グルオンを交換しながら絶え間なくカラーを変え続け，その結果，互いに結び付いている．白色のメソンについても事情は同じである．

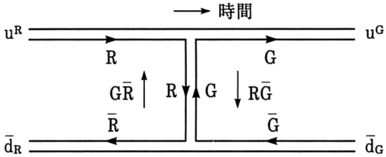


図8.5　グルオンの交換によるクォークのカラーの変化．反クォークのカラーの線の矢印を逆向きにつけると，カラーの移動の矢印の向きはつながる．$R\bar{G}$ グルオンの放出と $G\bar{R}$ グルオンの吸収は同等である．

このように，

> クォーク間の強い相互作用は，3種類のカラーのついたクォークがゲージボソンである8種類のカラーのついたグルオンを交換することによって生じる．

図8.5から明らかなように，グルオンの放出・吸収でクォークはカラーを変えるがフレーバーを変えないので，グルオンの交換による強い相互作用では電荷，バリオン数，ストレンジネスなどは保存する．なお，電磁相互作用はクォークのカラーとフレーバーを変化させない．

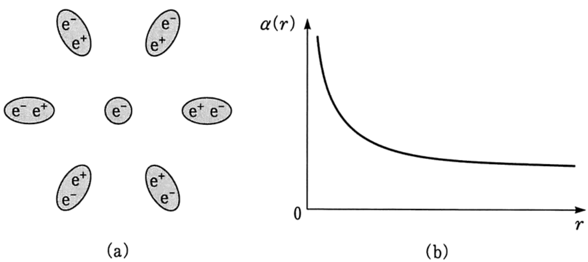


図8.6　真空中での電磁相互作用の結合定数（微細構造定数）$\alpha(r) = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ の変化
(a)　真空中での電子 e^- と陽電子 e^+ のペアの生成による真空の偏極（光子を表す線は省略されている）
(b)　真空偏極による電荷の遮蔽によって引き起こされた $\alpha(r)$ の距離 r による変化

不確定性関係によって，$\Delta t \lesssim \hbar/\Delta E$ を満たす短時間 Δt なら，エネルギー保存則を ΔE 程度破る過程を行うことが許される．そのため，荷電素粒子が光子を放出し，この光子がクォークと反クォークのペアになり，このペアが消滅するという過程が絶え間なく発生している．この正と負の電荷を帯びたクォークと反クォークのペアは，図8.6に示すように真空を偏極状態にさせ，荷電素粒子の電荷を遮蔽する．その結果，荷電素粒子の間の電磁相互作用は遠距離になると弱くなり，近距離になると強くなる．

ところが，グルオンはカラー荷電を帯びているので，光子を放出・吸収できない光子とは異なり，グルオンを放出・吸収できる（図8.7）．この過程の効果によって，QCDではクォーク間の相互作用は遠距離で強く，近距離では弱い（漸近的自由性）という性質がある．

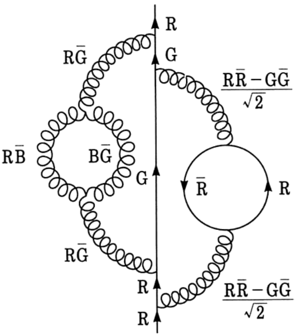


図8.7 グルオンはクォークと反クォークのペアに相互転換すると共に，グルオンを放出・吸収する．

電場の電気力線は電荷から等方的に出て行くので，電気力線の密度は距離の2乗に反比例して減少し，電場は距離の2乗に反比例して弱くなっていく．しかし，強い相互作用の場合は，グルオンの帯びているカラー荷電によってカラー場の力線は放射状にならずに，クォークと反クォークを結ぶひも状になり（図8.8），密度は距離が離れてもほぼ一定なので，力の強さも一定であり，その結果，クォークがハドロンの中に閉じ込められると考えられている．

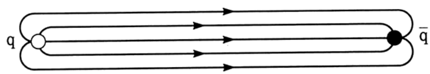


図8.8 グルオンはカラー荷電を帯びているので，クォークと反クォークの間でカラー場の力線は一定の太さのひものようになって伸びている．そのため，クォーク間力の強さは距離によらず，ほぼ一定である．

図8.9に示すように，漸近的自由性は実験で確認されている．QCDの漸近的自由性

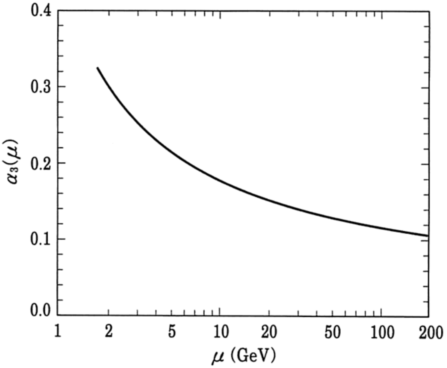


図 8.9　QCD の結合定数 $\alpha_3(\mu) = g_3(\mu)^2/4\pi\hbar c$ のエネルギー依存性．μ は放出・吸収されるグルオンのエネルギー．グルオンを交換するクォーク間の距離を r とすると，$r \sim \hbar c/\mu$ なので，この図は $r \to 0$ での漸近的自由性を示す．

は 1973 年にポリッツァー，グロスとウィルチェックによって証明された．

計算物理学と QCD（量子色力学）

QCD が強い相互作用の正しい理論であれば，ハドロンの質量やハドロンの反応断面積などが計算できて，理論値が実験値を再現できなければならない．弱い相互作用や電磁相互作用のような比較的に弱い相互作用の場合には，摂動論を使って系統的に計算することができる．これに対して，強い相互作用の関与する過程に対しては摂動論を適用できない．

現在，QCD の最も有力な計算方法は，スーパーコンピューターを利用するシミュレーションである．この方法では，4 次元の無限な時空間を 4 次元の有限な格子空間で近似して計算する．

図 8.10 に，重いクォークと反クォークの間にはたらく強い力のポテンシャルエネルギー $U(r)$ が距離 r と共に変化する様子のシミュレーションによる計算結果を示す．$r \to \infty$ で $U(r)$ は r に比例して増加するので，クォークと反クォークの間に作用する強い力は距離が離れても強さが一定の引力

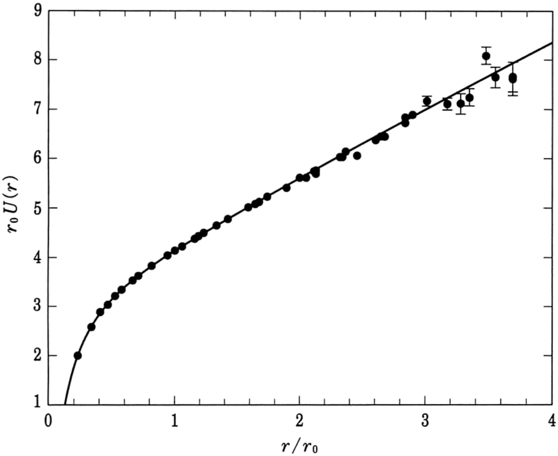


図 8.10 重いクォークと反クォークの間にはたらく強い力のポテンシャルエネルギー $U(r)$ のモンテカルロ・シミュレーションによる計算結果．$r_0 \fallingdotseq 0.5 \times 10^{-15}$ m．（筑波大学計算物理学研究センター提供）

であること，つまり，QCD ではクォークが閉じ込められることがわかる（クォークと反クォークの距離が大きくなりすぎると，クォークと反クォークが分離するのではなく，新たにクォークと反クォークのペアが生成して 2 個のメソンになる）．また，$r \to 0$ で $U(r)$ は r に反比例するクーロン型ポテンシャルであることもわかる．

QCD のシミュレーションでハドロンの質量も計算されている．メソンはクォークと反クォーク各 1 個の複合粒子で，バリオンはクォーク 3 個の複合粒子だと仮定し，クォークの質量 $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}}$ と m_{s} を与えて，コンピューター・シミュレーションでハドロンの質量を計算できる．しかし，クォークの質量は直接測定できない．そこで，適当な 3 個のハドロンの質量が正しく導けるように，3 種類のクォークの質量を決め，残りの軽いハドロンの質量を計算すると，10 % 以内の精度で，残りの軽いハドロンの質量を再現できる（図 8.11）．この事実は，QCD が強い相互作用の正しい理論であることを示

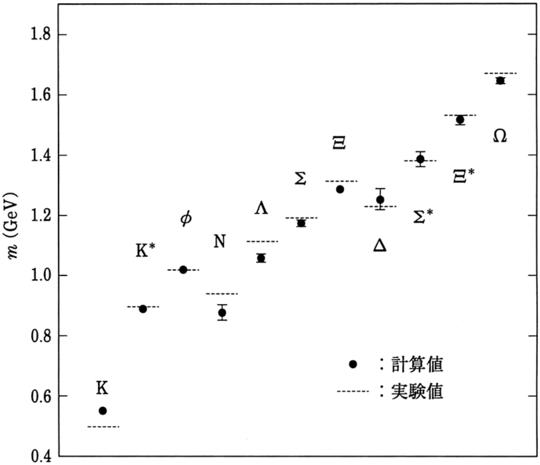


図 8.11　軽いハドロンの質量のモンテカルロ・シミュレーションによる計算結果．パイ中間子，ロー中間子，ファイ中間子の質量は，実験に合うように入力した（3つの質量は，$m_u = m_d$，m_s と格子間隔を決めるのに使用した）．クォークと反クォークのペアの生成・消滅は無視する，クエンチ近似での計算である．（筑波大学計算物理学研究センター提供）

唆している．

この計算では，クエンチ近似とよばれる，クォークと反クォークのペアの生成・消滅を無視する近似を行っているが，この近似をしない計算も，計算機の計算能力が増すことによって可能になる．このように，高性能計算機を主要な研究手段とする物理学を**計算物理学**という．

§8.6　電子－核子の大角度非弾性散乱とパートン模型

原子の中心に小さな原子核が存在する事実は，原子の大きさよりも小さなアルファ粒子を原子に当てて，アルファ粒子が散乱する様子を調べることによって確かめられた．ラザフォードは，入射したアルファ粒子の中には大角度で散乱されるものがある事実から原子核の存在を知ったが，それと同時

に，大角度で散乱される確率は原子核の帯びている電荷の 2 乗に比例するという理論式を使って，原子核の電荷の大きさを知ることも（原理的には）できた.

このラザフォードのアイディアを陽子や中性子に使ってみる．つまり，陽子や中性子の内部のクォークを探るために，陽子や中性子よりも広がりの小さな電子を陽子や中性子に当ててみる．非相対論的量子力学によると，電子と陽子の両方が点状粒子の場合の重心系での弾性衝突の微分断面積 σ_{el} は

$$\sigma_{\mathrm{el}}(\theta) = \frac{\mu^2 e^4}{64\pi^2\hbar^4 k^4 \sin^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{8.12}$$

である．ここで，μ は電子 - 核子系の換算質量で，$\hbar k = \mu v$ は運動量である.

陽子が点状ではなく，電荷が広がっていて，その分布が $\rho(r)$ の場合の弾性衝突の微分断面積は，(8.12) と形状因子とよばれる

$$F(K) = F\left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right) = \iiint \rho(r)\, e^{-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \qquad (K = |\boldsymbol{k}_{\mathrm{f}} - \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}|) \tag{8.13}$$

の積の

$$\sigma(\theta) = \sigma_{\mathrm{el}}(\theta)\left|F\left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 \tag{8.14}$$

である．なお，陽子の電荷分布の形状因子は

$$F(K) \approx \frac{1}{1+\left(\dfrac{K}{0.71\,\mathrm{GeV}/c}\right)^2} \tag{8.15}$$

である.

$\sigma_{\mathrm{el}}(\theta)$ も $F(K)$ も電子の散乱角 θ が大角度になると急速に減少する関数なので，もし陽子や中性子が約 10^{-15} m の広がりをもつ均質な粒子ならば，エネルギーが約 15 GeV 以上（ド・ブロイ波長が約 10^{-16} m 以下）の電子を当てても大角度の弾性散乱が起こる可能性はほとんどない.

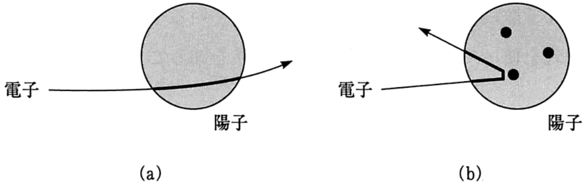


図 8.12　電子を使ってクォークを探る．
(a)　もしも陽子が広がった粒子なら，電子は大角度に散乱されない．
(b)　陽子の中に硬い点状粒子のクォークがあれば，電子を当てると大角度に散乱されるだろう．

しかし，陽子や中性子の中に硬い点状粒子のクォークが存在すると，電子とクォークの弾性散乱によって電子が大角度に散乱されることが予想される(図 8.12)．この現象が，電子の陽子による大角度の非弾性散乱である．大角度散乱の起こる確率は，クォークの電荷の 2 乗の和に比例する．

1960 年代の末頃に米国のスタンフォード線形加速器センター (SLAC) の長さが 3 km のリニアックで，20 GeV にまで加速された電子を陽子や中性子に当てる実験が行われた．その結果，陽子や中性子の中には硬い点状の粒子が存在すること，また，点状粒子の電荷の 2 乗の和は電気素量 e を単位にすると，陽子の場合はほぼ 1 で，中性子の場合はほぼ 2/3 であることがわかった．陽子の中のクォークの電荷の 2 乗の和は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

で，中性子の中のクォークの電荷の 2 乗の和は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

なので，クォーク模型は実験結果と見事に一致している．

電子と核子の衝突実験では，核子の中のクォークの電荷以外の情報も得られる．高速で運動している核子の運動量を $\boldsymbol{P}$ とする．核子がクォーク 3 個から構成されているのであれば，この 3 個のクォークも核子の進行方向に進

んでいるので，i 番目のクォークの運動量 $\boldsymbol{p}_i$ は核子の運動量 $\boldsymbol{P}$ の x_i 倍で，

$$\boldsymbol{p}_i = x_i\boldsymbol{P} \qquad (0 \leqq x_i \leqq 1) \tag{8.16}$$

と書けるだろう．($\boldsymbol{p}_i$ には核子の運動量 $\boldsymbol{P}$ に垂直な成分もあるが，これは小さいとして無視する（図 8.13 参照）．)

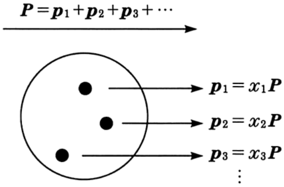


図 8.13　陽子の運動量は構成粒子の運動量の和に等しい．

核子との衝突によって大きく曲がる電子の散乱角とエネルギーを測定すると，電子が衝突したクォークの運動量を推定できる．したがって，電子と核子の衝突実験の結果から，核子の中のクォークの運動量が $\boldsymbol{P}$ の x 倍である確率 $q(x)$ を求められる．実験結果を図 8.14 に示す．

核子の中では，クォークがグルオンを互いに交換し合っているが，このグルオンは一時的にクォークと反クォークのペアになる．したがって，核子の中には反クォークも存在する．この反クォークの運動量分布関数 $\bar{q}(x)$ についての情報はニュートリノ反応から得られる．$\bar{q}(x)$ についての実験結果も図 8.14 に示す．

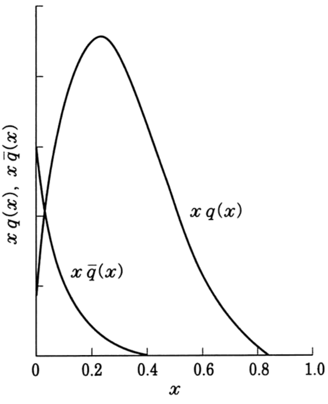


図 8.14　1970 年代に測定された，クォークと反クォークの運動量分布関数 $q(x)$，$\bar{q}(x)$ のおおよその形．グラフには $q(x)$，$\bar{q}(x)$ ではなく，$x\,q(x)$，$x\,\bar{q}(x)$ の相対的な大きさが示されている．

図 8.14 の実験結果から，グルオンの存在についての情報も得られる．もし核子がクォーク 3 個だけから構成されているのであれば，クォークの運動量の平均は核子の運動量の 1/3 のはずである（$x \sim 1/3$）．ところが，実験結果によると約 1/6 である（図 8.14 には $q(x)$ ではなく $x\,q(x)$ が示されていることに注意）．この実験結果は，核子の中の 3 個のクォークが核子の運動量の約半分だけを受けもっていて，残りの部分は別の粒子が受けもっていることを示す．この別の粒子は電子と作用しないので，電気を帯びていない中性の粒子であり，クォークを結び付ける役割を演じるグルオンだと考えられる．

この節で説明した理論は，陽子による電子の大角度非弾性散乱実験の結果を聞いたファインマンが，その場で提案したといわれている理論である．彼はハドロンの基本的な構成要素をパートン（部分子）とよんだので，この理論を**パートン模型**という．

§8.7　電子－陽電子衝突

ハドロンのジェット

電子と核子の衝突実験は核子の中のクォークの研究に大いに役立ったが，この反応と同じかそれ以上に役立ったのが，高エネルギーの電子 e^- と高エネルギーの陽電子 e^+ を正面衝突させて対消滅させ，新しい素粒子を発生させる実験であった．電子と陽電子は強い相互作用をせず，性質のよく知られている電磁相互作用で作用し合うので，反応の理論的分析が容易である．

電子が散乱されるときには，電磁相互作用を仲立ちする光子が放出・吸収されるように，電子と陽電子が衝突して消滅すると，まず，そのエネルギーをもつ光子が作られる．この光子はハドロンになったり，正電荷と負電荷のミュー粒子のペアになったりする．これらの過程は次のように表される．

$$e^- + e^+ \;\rightarrow\; \text{光子} \;\rightarrow\; \text{ハドロン(複数)}$$

$$e^- + e^+ \;\rightarrow\; \text{光子} \;\rightarrow\; \mu^- + \mu^+$$

クォーク模型ではハドロンが発生する過程として，電子と陽電子が消滅したときに発生する光子が，まず，クォーク q とその反粒子の反クォーク $\bar{q}$ のペアになって，それがハドロンになると考える．すなわち，

$$e^- + e^+ \;\rightarrow\; 光子 \;\rightarrow\; q + \bar{q} \;\rightarrow\; ハドロン(複数)$$

と考える．

このようにハドロンの発生が途中でクォークと反クォークのペアの状態を経由しているという証拠が，ハドロンのジェット現象である．ペアで発生したクォークと反クォークは，グルオンを仲立ちとする強い相互作用で引き合いながら離れていくので，この強い相互作用の力線はゴムひものように伸びていくと想像してみよう．クォークと反クォークの距離が大きくなると，ゴムひもの一部が切れる．磁石を切ると切り口には N 極と S 極が現れて 2 つの磁石になり，N 極と S 極を単独には分離できないように，グルオンのゴムひもが切れると，切り口にはクォークと反クォークが現れて，クォークと反クォークを分離できないと考えてみよう．そうすると，ゴムひもの小さな切れ端はメソンとして飛び去っていくことになる（図 8.15(a)）．ゴムひも

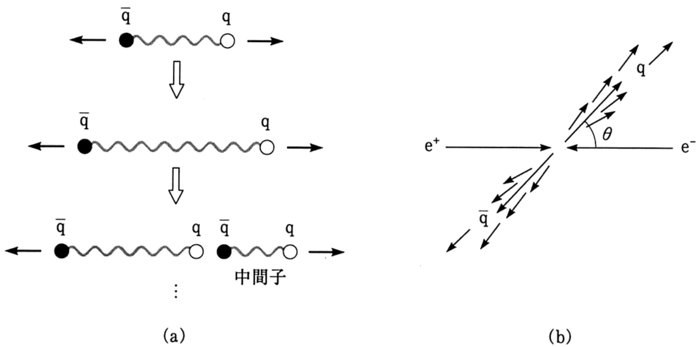


図 8.15　ハドロンのジェット
(a)　クォーク q と反クォーク $\bar{q}$ は分離できないと考える．
(b)　ハドロンのジェットの進行方向は q か $\bar{q}$ の進行方向を向いている．

の残った部分はその後も伸びていき，また一部分がメソンになってちぎれていく．こういうことをくり返していった現象が，電子と陽電子の衝突によるハドロンの多重発生だと考えられる．

このような一連の過程で発生したゴムひもの切れ端であるハドロンの飛んでいく方向は，クォークと反クォークの進行方向を向いているはずである．つまり，高エネルギーの電子と陽電子の衝突で発生するハドロンの進行方向は，正反対の2方向に集中しているはずである．これをハドロンの**ジェット**とよぶ（図8.15(b)）．このような予想通り，高エネルギーの電子と高エネルギーの陽電子を正面衝突させるとハドロンのジェットが観測される．実験で得られたハドロン（主としてメソン）の2本のジェットの実例を図8.16に示す．このようにして，クォークそのものの検出はできないが，ハドロン

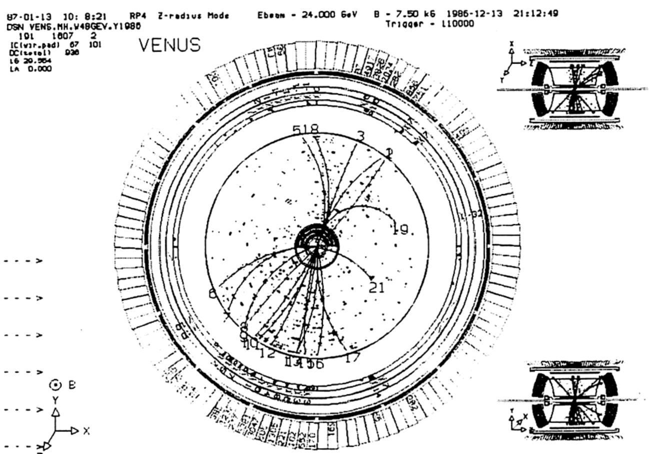


図8.16　クォークと反クォークの発生を示す2つのジェット．＋z方向に進む24 GeVの電子と－z方向に進む24 GeVの陽電子が衝突して消滅し，クォークと反クォークのペアが発生した．クォークと反クォークは多数のメソンに壊れる．実線は電荷を帯びたメソンの飛跡である．＋z方向に0.75 Tの磁場がかかっている．

（高エネルギー加速器研究機構 提供）

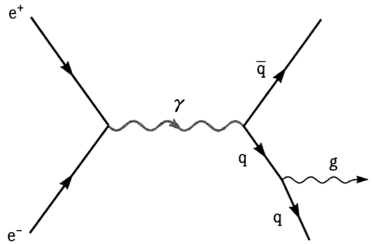


図 8.17　3本のジェットを発生させる過程 $e^- + e^+ \to \gamma \to q + \bar{q} + g$ のファインマン図の例.

のジェットとしてクォークを間接的に検出できる.

クォークばかりではなく,

$$e^- + e^+ \;\to\; \text{光子} \;\to\; \text{クォーク}\ q + \text{反クォーク}\ \bar{q} + \text{グルオン}\ g$$
$$\to\; \text{ハドロン(複数)}$$

という過程（図 8.17）で，発生するクォークと反クォークとグルオンから生じた，3本のハドロンのジェットも観測されている．高エネルギーの素粒子反応の素過程で発生するのはレプトン，クォークとグルオンであるが，実際に観測されるのはレプトン，クォークのジェットとグルオンのジェットである.

***R* 比**

電子と陽電子が衝突するとハドロンが発生するが，強い相互作用をしないレプトンであるミュー粒子のペア μ^- と μ^+ も

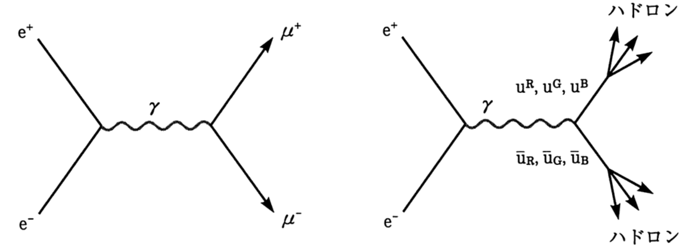
$$e^- + e^+ \;\to\; \text{光子} \;\to\; \mu^- + \mu^+$$

という過程で発生する.

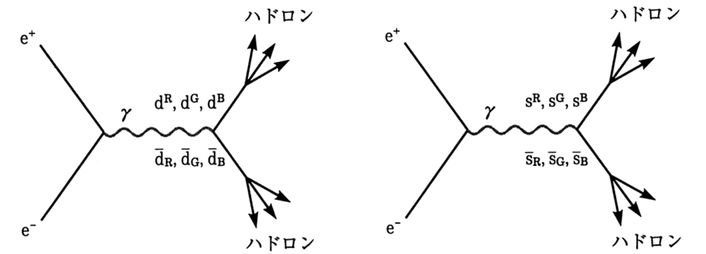
光子が荷電粒子とその反粒子のペアに転化する確率は，荷電粒子の電荷の2乗に比例する．そこで，$e^- + e^+ \to$ ハドロンという反応が，本質的には

$$\begin{aligned} e^- + e^+ \;\to\; \text{光子} \;\to\; & u^R + \bar{u}_R, \quad u^G + \bar{u}_G, \quad u^B + \bar{u}_B, \\ & d^R + \bar{d}_R, \quad d^G + \bar{d}_G, \quad d^B + \bar{d}_B, \\ & s^R + \bar{s}_R, \quad s^G + \bar{s}_G, \quad s^B + \bar{s}_B \end{aligned}$$

という反応であるのならば,「ハドロンの発生反応」の確率と「ミュー粒子



(a) ミュー粒子が生まれる確率 $\propto e^2$　　(b) ハドロンが生まれる確率 $\propto \left(\frac{2}{3}e\right)^2 \times 3$



(c) ハドロンが生まれる確率 $\propto \left(-\frac{1}{3}e\right)^2 \times 3$　(d) ハドロンが生まれる確率 $\propto \left(-\frac{1}{3}e\right)^2 \times 3$

図 8.18　クォークに 3 種類のカラーがあれば，R 比は 2 になるはずである．

のペアの発生反応」の確率の比 R（R 比）は，

$$R = \frac{3 \times \left(\frac{2}{3}e\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}e\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}e\right)^2}{e^2}$$

$$= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 2 \qquad (8.17)$$

になると予想される（図 8.18）．クォークが 3 種類のカラー荷電を帯びていなければ，R は 2 ではなく 2/3 になるはずである．

図 8.19 に示した実験データを調べてみよう．縦軸は R 比で，横軸の E_{cm} は「電子のエネルギー」+「陽電子のエネルギー」である．1972 年頃まで

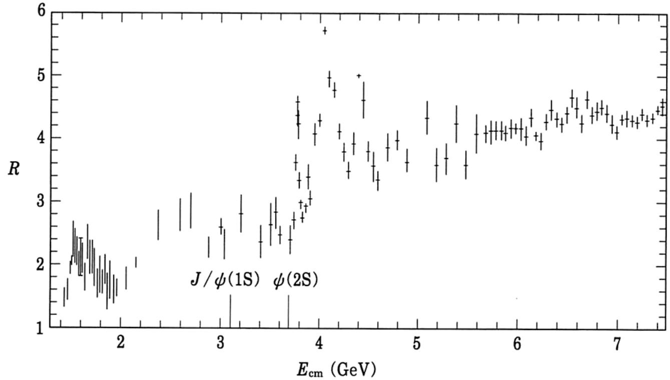


図 8.19　ハドロン生成反応の起こる確率とミュー粒子対生成反応の起こる確率の R 比．J/ψ(1 S) と ψ(2 S) の縦棒の所には高いピークがあるが省略した．(Eur. Phys. J. C. **15** (2000) 1 による)

は，E_{cm} が 3 GeV 以下のデータしかなかったので，R 比の理論値の 2 は，実験値と矛盾しないことになった．この事実は，クォークに 3 種類の色がついているという理論の大きな証拠である．

§8.8　重いクォーク　— c クォーク，b クォーク，t クォーク —

これまで述べたように，クォークには u，d，s などのフレーバー（香り）と赤，緑，青の 3 種類のカラーがついていることが判明した．それでは，クォークには何種類のフレーバーがあるのだろうか．

ストレンジクォーク（s クォーク）を構成要素として含んでいる奇妙な粒子（ケイ中間子，ラムダ粒子，シグマ粒子，グザイ粒子）を特徴付ける保存量のストレンジネス（奇妙さ）S は，1953 年に中野董夫，西島和彦とゲルマンによって提案されたものである．

その後，チャーム粒子を特徴付ける保存量である第 4 のフレーバーのチャーム C が 1963 年に原 康夫と牧 二郎によって独立に，ボトム粒子とトップ粒子を特徴付ける保存量である第 5，第 6 のフレーバーのボトム B とトップ

T が 1972 年に小林 誠と益川敏英によって提案された．これに対応して，1974 年にチャーム粒子が発見され，1978 年にボトム粒子が発見されたので，チャームクォーク（c クォーク）とボトムクォーク（b クォーク）の存在が裏付けられた．

c クォークとその反粒子の $\bar{c}$ クォークは，グルオンの交換を仲立ちにする強いクォーク間力によって，**チャーモニウム**とよばれる一群の複合粒子（束縛状態）$J/\psi(1\,S)$，$\psi(2\,S)$，… を作り，b クォークとその反粒子の $\bar{b}$ クォークは図 8.20 に示す**ボトモニウム**とよばれる一群の複合粒子（束縛状態）を作る．

図 8.20 のウプシロン粒子 $\Upsilon(1\,S)$，$\Upsilon(2\,S)$，$\Upsilon(3\,S)$，$\Upsilon(4\,S)$，… は，b クォークと $\bar{b}$ クォークの相対軌道角運動量が 0（S 状態）でスピンの合成角運動量が 1 の束縛状態であるベクトルメソンで，電子－陽電子衝突で大量に生成される．$\Upsilon(2\,S)$ や $\Upsilon(3\,S)$ などがガンマ崩壊して生じる粒子のカイ

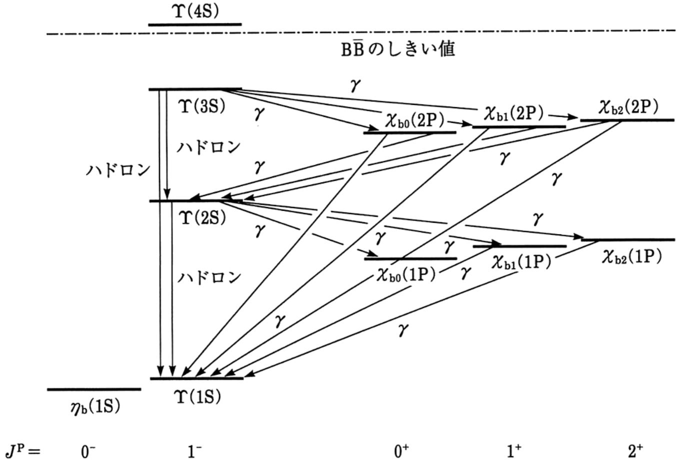


図 8.20　ボトモニウムの準位図．q と $\bar{q}$ の相対軌道量子数を L とすると，$q\bar{q}$ 状態の $P = -(-1)^L$ である．図の 1 P，2 P は原子物理学では 2 P，3 P とよばれていることに注意．（Eur. Phys. J. C. **15**（2000）1 による）

粒子 χ_{b0}，χ_{b1}，χ_{b2} は，b クォークと $\bar{b}$ クォークの相対軌道角運動量が 1（P 状態），スピンの合成角運動量が 1 で，全角運動量が 0，1，2 の束縛状態である．2S 状態と 1P 状態，3S 状態と 2P 状態がほぼ縮退しているので，クーロンポテンシャルによる陽子と電子の束縛状態である水素原子のエネルギー準位に似ている．この事実は，QCD によるクォーク間力の位置エネルギーは短距離では距離 r に反比例することを意味する．この結果は，図 8.10 に示した QCD のコンピューター・シミュレーションの結果と一致している．

$\bar{b}$ クォークと u クォークは束縛状態を作って B^+，$\bar{b}$ クォークと d クォークは B^0，$\bar{b}$ クォークと s クォークは B_s^0，$\bar{b}$ クォークと c クォークは B_c^+ などのメソンになる．$\Upsilon(4S)$ の質量は B^+ や B^0 の質量の 2 倍より大きいので，$\Upsilon(4S)$ およびそれより質量の大きな b クォークと $\bar{b}$ クォークの束縛状態は，$\Upsilon(4S) \to B^+ + B^-$，$\Upsilon(4S) \to B^0 + \overline{B}^0$ などの崩壊を行う．b クォークを含むバリオンも発見されている．なお，B_c 中間子は，米国のフェルミ国立加速器研究所（FNAL）の巨大衝突型加速器テバトロンの CDF 実験で筑波大学の研究者が中心になって発見したものである．

トップクォーク（t クォーク）の存在は，近藤都登を中心とする筑波大学グループを含む実験チームがテバトロンを使用して，1995 年に確認した．図 8.21 は，このグループが発見した現象の飛跡図である．曲線は，検出された荷電

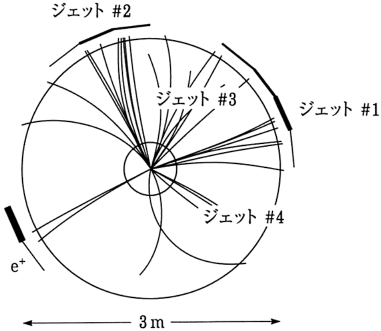


図 8.21　トップクォークの生成．米国のフェルミ国立加速器研究所の CDF 検出器で検出された，$t\bar{t}$ 発生現象．t と $\bar{t}$ は $t \to b$（ジェット #4）$+ W^+$，$W^+ \to e^+ + \nu_e$，$\bar{t} \to \bar{b}$（ジェット #1）$+ W^-$，$W^- \to q + \bar{q}$（ジェット #2, 3）のように崩壊する．
（CDF 実験グループ 提供）

粒子の飛跡を示す．この図は，陽子と反陽子が衝突して消滅し，t クォークとその反粒子の $\bar{t}$ クォークが生成し，t クォークが b クォーク（ジェット #4）と陽電子と電子ニュートリノに崩壊し，$\bar{t}$ クォークが $\bar{b}$ クォーク（ジェット #1）と W^- ボソンの崩壊生成物のクォークと反クォーク（ジェット #2，#3）になったことを示す．

図には多数の荷電粒子の飛跡が記録されているが，半端な電荷を帯びた荷電粒子のクォークの飛跡はない．勢いよく運動するクォークや反クォークにともなって発生したと考えられる数多くのハドロンのジェットが，b クォーク，$\bar{b}$ クォークとそのほかのクォークが発生した証拠である．t クォークの平均寿命は極めて短いので，t クォークは $\bar{t}$ クォークやほかのクォークと束縛状態を作る前に崩壊して W^+ と b になり（$t \to W^+ + b$），観測できる長さの飛跡を残さない．

このようにして，現在では，強い相互作用をするハドロンの基本粒子として，u，d，s，c，b，t の 6 種類のクォークの存在が確かめられている．3 種類の重いクォーク c，b，t の性質を表 8.3 に示す．

表 8.3　重い 3 種類のクォーク

クォーク	Q	B(バリオン数)	S	C	B(ボトム)	T	
c	2/3	1/3	0	1	0	0	チャームクォーク
b	−1/3	1/3	0	0	−1	0	ボトムクォーク
t	2/3	1/3	0	0	0	1	トップクォーク

電荷の単位は電気素量 e である．

§8.9　クォークの弱い相互作用

ハドロンの弱い相互作用の基本は，ゲージボソンであるウィークボソンとクォークの弱い相互作用である（図 8.22）．たとえば，中性子のベータ崩壊は，d クォークが W^- ボソンを放出して u クォークになることが原因になって，図 1.5 のように起こる．

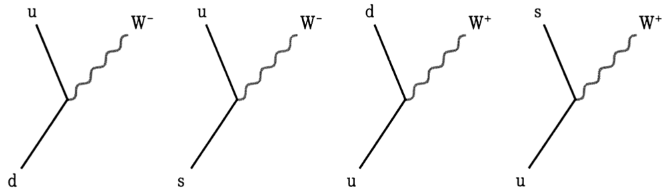


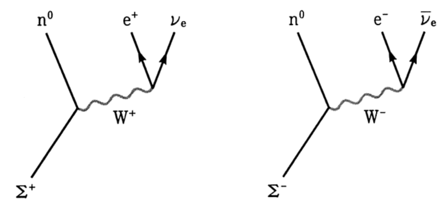
図 8.22 クォークによる W ボソンの放出

次の 2 つの崩壊

$$\Sigma^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu_e$$

$$\Sigma^- \rightarrow n^0 + e^- + \bar{\nu}_e$$

を考えよう．クォークを考えないと，両方の過程が起こりそうである（図 8.23）．しかし，クォークを考えると，Σ^-(dds) → n^0(udd) + e^- + $\bar{\nu}_e$ は起こるが（図 8.24），Σ^+(uus) → n^0(udd) + e^+ + ν_e は起こらないことがわかる．実験結果は，クォーク模型の予言の通りである．



(a) 実際には起こらない　(b) 実際に起こる

図 8.23

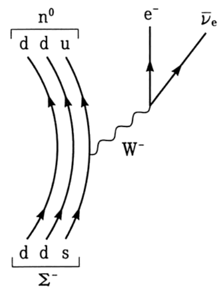


図 8.24 $\Sigma^- \rightarrow n^0 + e^- + \bar{\nu}_e$

演 習 問 題

［1］ 次の反応は電荷，バリオン数，ストレンジネスなどの保存則によって許さ

れるかどうかを述べよ．

$$K^- + p^+ \;\rightarrow\; K^0 + n^0, \qquad K^- + p^+ \;\rightarrow\; \overline{K}^0 + n^0,$$

$$K^+ + p^+ \;\rightarrow\; \pi^+ + \Sigma^+, \qquad K^+ + p^+ \;\rightarrow\; p^+ + \Sigma^+$$

［**2**］ π^- と p^+ の衝突で生成可能な奇妙な粒子を含む系の中で，質量の和が最小の系は $K^0 + \Lambda^0$ である．

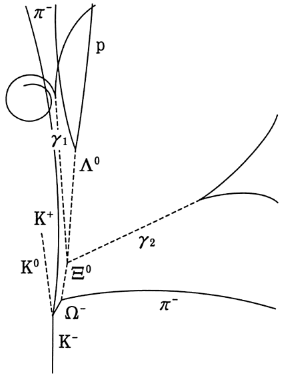
（1） π^- と p^+ の衝突で生成可能な K^- を含む系の中で，質量の和が最小の系は何か．

（2） π^- と p^+ の衝突で生成可能な K^+ を含む系の中で，質量の和が最小の系は何か．

［**3**］ 前問の結果を使い，比較的エネルギーが低いビームによる反応では，K^- より K^+ の方が多く発生する理由を述べよ．

［**4**］（1） $B = 1$，$Q = -1$，$S = -3$ のオメガ粒子 Ω^- は強い相互作用では崩壊できない理由を説明せよ．Ω^- の質量は 1672 MeV/c^2 である．

（2） 下の図は水素泡箱に入射した K^- 中間子によるオメガ粒子 Ω^- の発生とその崩壊の様子を描いたものである．この反応の式を記せ．なお，γ 線は飛跡を残さないが，物質中では荷電粒子の作る電磁場の効果で，電子と陽電子のペアに変換する．



[**5**] 6種類の記号u↑，u↓，d↑，d↓，s↑，s↓をくり返しを許して3個使って作られる状態は $6 \times 6 \times 6 = 216$ ある．このうち，3個のクォーク記号の交換で完全対称な状態は56種類である．56種類の状態は，スピン3/2のバリオンの10重項とスピン1/2のバリオンの8重項にぴったり対応することを示せ．

[**6**] ラムダ粒子（uds）と中性のシグマ粒子（uds）の波動関数のスピンとアイソスピンの部分は，クォークの交換で完全対称だと仮定する．udのアイソスピンはラムダ粒子では0，中性シグマ粒子では1であり，udのスピンはラムダ粒子では0（逆向き），中性シグマ粒子では1（同じ向き）であることを示せ（クォークと反クォークの間にはたらく力の強さは，スピンが逆向きの場合の方が同じ向きの場合より強い）．

[**7**] 電子ニュートリノのビームを陽子に入射する場合と，中性子に入射する場合に，電子が発生する確率の比は1：2であることを示せ．

[**8**] 陽子pと中性子nを構成するクォークのスピンとフレーバーの波動関数を

$$\mathrm{p}\left(s_z = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{18}}(\mathrm{u}\uparrow \mathrm{u}\downarrow \mathrm{d}\uparrow + \mathrm{u}\downarrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\uparrow + \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\downarrow + \mathrm{u}\downarrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\uparrow + \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{u}\downarrow + \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\downarrow \mathrm{u}\uparrow - 2\mathrm{u}\uparrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\downarrow - 2\mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\downarrow \mathrm{u}\uparrow - 2\mathrm{d}\downarrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{u}\uparrow)$$

$$\mathrm{n}\left(s_z = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{18}}(\mathrm{d}\uparrow \mathrm{d}\downarrow \mathrm{u}\uparrow + \mathrm{d}\downarrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\uparrow + \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\downarrow + \mathrm{d}\downarrow \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\uparrow + \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{d}\downarrow + \mathrm{u}\uparrow \mathrm{d}\downarrow \mathrm{d}\uparrow - 2\mathrm{d}\uparrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\downarrow - 2\mathrm{d}\uparrow \mathrm{u}\downarrow \mathrm{d}\uparrow - 2\mathrm{u}\downarrow \mathrm{d}\uparrow \mathrm{d}\uparrow)$$

とし，uクォークの固有磁気モーメント演算子を $(e\hbar/3m)\boldsymbol{\sigma}$，dクォークの固有磁気モーメント演算子を $-(e\hbar/6m)\boldsymbol{\sigma}$ として，陽子と中性子の固有磁気モーメント μ_p，μ_n を計算せよ（uクォークとdクォークを，ディラック方程式に従う質量 m，電荷 $(2/3)e$, $-(1/3)e$ の粒子だと考える）．

クォークの語源

図 8.2，8.3 に示した 3 角形や 6 角形の配置の対称性は，数学的には $SU(3)$ 群とよばれる群の性質である．この数学的関係にヒントを得て，「ハドロンは，3 種類の基本的な粒子とその反粒子から構成された複合粒子である」というアイディアを提出し，基本粒子をクォーク（quark）と命名したのはゲルマン博士（1929 -）である．

クォークという単語の本来の意味は海鳥の鳴き声の擬音であるが，ゲルマン博士は，ジェームズ・ジョイスの難解な小説『フィンネガンの徹夜祭』の“Three quarks for Muster Mark !”「コーンウォールのマーク王のもとに嫁いでいくイゾルデと，護衛するトリスタンが乗っている船の周りに立ち込めている霧の中で海鳥（かもめ）がクォーク，クォーク，クォークと 3 声鳴いた）という 1 節に出てくる“three quarks”という言葉にちなんで命名したのである．この語源と物理的な内容はまったく無関係である．

ところで，電気素量 e の 2/3 倍や 1/3 倍という「半端な」大きさの電荷をもつクォークを提案することに対して，ゲルマン博士にはためらいがあった．というのは，全世界で毎年何万人という学生が学生実験でミリカンの実験をしているのに，「半端な電荷」は発見されなかったからであった．クォーク模型が提案された 1963 ～ 64 年に，私はカリフォルニア工科大学のゲルマン・グループの研究員であったが，ゲルマン博士は，クォークが実在する「素粒子」なのかそれとも数学的なシンボルなのかについて思い悩んでいたようであった．

9 フェルミオンの世代と混合

素粒子物理学のこれまでの研究成果は，標準模型としてまとめられている．標準とは素粒子物理学の標準規格という意味で，簡単にいえば，第7章で学んだ電弱統一模型と第8章で学んだQCD（量子色力学）がその内容である．

物理学は絶えず進歩する学問であるから，標準理論にも追加や修正が行われていくが，これまで高エネルギー加速器などを使用して行われた素粒子実験の結果は，ニュートリノが極めて小さな質量をもつという点を除けば，標準模型から導かれる理論的結果と一致している．

そこで，新しいタイプの現象を調べて，これらの現象が標準模型の予想通りかどうかを調べ，標準模型を超える模型を探ることが，素粒子物理学の重要課題である．

この章では，まず，標準模型で説明されるかどうかが探求されているCP不変性の問題を学ぶ．続いて，ニュートリノの質量は0だとする標準模型では説明できない，ニュートリノ振動現象を学ぶ．

§9.1 標準模型

これまでに，物質構造の基本粒子には，

クォーク：u クォーク，d クォーク，c クォーク，s クォーク，
　　　　　t クォーク，b クォーク

レプトン：電子 e，ミュー粒子 μ，タウ粒子 τ，電子ニュートリノ ν_e，
　　　　　ミューニュートリノ ν_μ，タウニュートリノ ν_τ

ゲージボソン：光子 γ，ウィークボソン W，Z，グルオン g

ヒグスボソン：H

の 4 つのタイプに分類される 17 種類が存在すること，そして，光子，ウィークボソン，グルオンはそれぞれ，電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用を仲立ちする素粒子のゲージボソンであり，ヒグスボソンは質量の原因になる素粒子であることを学んだ．また，電磁相互作用と弱い相互作用は，電弱統一理論の電弱対称性が自発的に破れて生じた相互作用であることも学んだ．

なお，標準模型では，ニュートリノはヒグスボソンと相互作用しないと仮定するので，ニュートリノの質量は 0 だと仮定されている．また，ウィークボソンはニュートリノの左巻き成分および反ニュートリノの右巻き成分のみと相互作用するので，標準模型ではニュートリノの右巻き成分および反ニュートリノの左巻き成分は存在しないと見なす．

§9.2　フェルミオンの世代

原子や分子を構成している粒子は原子核と電子である．原子核は陽子と中性子から構成され，陽子と中性子は u クォークと d クォークから構成されている．したがって，我々の周囲の物質は u クォーク，d クォークと電子から構成されていることになる．この 3 粒子と，ベータ崩壊で発生する電子ニュートリノの 4 つの基本粒子，

$$\mathrm{u},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e},\ \nu_{\mathrm{e}}$$

を**第 1 世代の基本粒子**という．第 1 世代の基本粒子は，質量が一番小さいクォークとレプトンのグループである．

質量が少し大きいクォークの c クォーク，s クォーク，それにミュー粒子およびミュー粒子と常にペアで現れるミューニュートリノの 4 つの基本粒子，

$$\mathrm{c},\ \mathrm{s},\ \mu,\ \nu_{\mu}$$

を**第 2 世代の基本粒子**という．

質量が大きいｔクォーク，ｂクォーク，それにタウ粒子およびタウ粒子と常にペアで現れるタウニュートリノの４つの基本粒子，

$$\mathrm{t},\ \mathrm{b},\ \tau,\ \nu_\tau$$

を**第３世代の基本粒子**という．

不安定なｃクォークが崩壊する場合には95％の確率でｓクォークになり，不安定なｔクォークが崩壊する場合には99.8％の確率でｂクォークになるので，ｃクォークとｓクォークを同一の世代に属させ，ｔクォークとｂクォークを同一の世代に属させるのは自然である．

フェルミオンの世代については，

1．　なぜ２種類のクォークと２種類のレプトンが１つの世代を形成するのか．
2．　なぜ複数の世代が存在するのか．
3．　何種類の世代が存在するのか．第４のフェルミオン世代は存在するのか．

などの疑問が生じる．

第１の問いに対してコメントできることは，場の理論の古典論での保存則が量子力学的効果で破れる（アノマリーとよばれる）現象が起こらないためには，フェルミオンの基本粒子の電荷の和が０でなければならないという条件が存在することである．１つのフェルミオン世代の中に，３種類のカラー荷電を帯びた電荷 $2e/3$ と $-e/3$ のクォークがそれぞれ１つずつと，電荷が $-e$ の荷電レプトンが１つと，電荷が０のニュートリノが１つ存在すれば，電荷の和は

$$3\times\left(\frac{2}{3}e\right)+3\times\left(-\frac{1}{3}e\right)+(-e)=0$$

である．

第２の問いに対する適切な回答は存在しない．たとえば，ミュー粒子と電子は質量が違うだけで，そのほかの性質は同じである．第２，第３のフェル

ミオン世代は，質量が異なることを除けば，第1世代のコピーだといってよい．

複数のフェルミオン世代の存在は現在の素粒子物理学にとって大きな謎である．

第3の問いに対する実験事実として，質量が約45 GeV/c^2以下のニュートリノは3種類しか存在しないという事実がある．この結論は，Zボソンの崩壊幅の研究から導かれる．Zボソンは，クォークとその反粒子のペアへの崩壊，荷電レプトンとその反粒子のペアへの崩壊のほかに，弱い相互作用しかしないために検出器で検出されないニュートリノとその反粒子のペアへの崩壊を行う．Zボソンの崩壊幅$\Gamma = 2.495$ GeVのうち，クォークと反クォークのペアへの崩壊および荷電レプトンとその反粒子のペアへの崩壊による部分の1.996 GeVを引いた残りの0.499 GeVは，$Z \to \nu_e + \bar{\nu}_e$，$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$，$\nu_\tau + \bar{\nu}_\tau$という3種類のニュートリノのペアへの（検出器では検出されない）崩壊の幅の理論値と一致する．この事実から，Zボソンは第4のニュートリノとその反粒子のペアへは崩壊していないと結論される．すなわち，第4のニュートリノが存在しても，その質量はZボソンの質量91.2 GeV/c^2の半分の約45 GeV/c^2以上である．

§9.3　世代の混合とCP不変性の破れ

弱い相互作用を仲立ちするゲージボソンのWボソン，W^+とW^-は，基本粒子の左巻き成分と反基本粒子の右巻き成分としか相互作用をしない．電荷が$2e/3$のuクォークの左巻き成分u_LがW^-を吸収すると（あるいはu_LがW^+を放出すると），uクォークは電荷が$-e/3$の3種類のクォークd，s，bの左巻き成分d_L，s_L，b_Lの1次結合

$$d'_L = V_{ud} d_L + V_{us} s_L + V_{ub} b_L \tag{9.1 a}$$

に変る．（この場合，(9.1 a)のd'は，変換後のクォークの状態を表す波動

関数と考えればよい．ここでいう左巻き成分 u_L は，§7.7 で定義した $(1-\gamma^5)u/2$ のことである．したがって，クォークが大きな質量をもつ場合には，大きな右巻き成分も含む．）

実際に観測されるのは d′ ではなく，d クォーク，s クォーク，b クォークのどれか（厳密には，これらのクォークのどれかを含むハドロン）であり，それが観測される確率はそれぞれ $|V_{ud}|^2$, $|V_{us}|^2$, $|V_{ub}|^2$ である（確率の和は $|V_{ud}|^2+|V_{us}|^2+|V_{ub}|^2=1$）．

d クォーク，s クォーク，b クォークの質量がすべて 0 ならば，(9.1 a) の状態 d′ は質量が 0 の粒子に対応しており，この粒子を d クォークとよぶことができる．したがって，W ボソンの吸収や放出によって，異なる世代に属するクォークへの転化は起こらない．しかし，ヒグス機構による対称性の自発的な破れによって，d クォーク，s クォーク，b クォークという異なる質量をもつ 3 つの粒子が生じ，そのいずれもが d′ と一致しないので，W ボソンの吸収や放出によって u → s，u → b のような異なる世代に属するクォークへの転化が起こることになった．これが，弱い相互作用によるストレンジネス非保存の原因である．

c クォークの左巻き成分 c_L，t クォークの左巻き成分 t_L が W^- を吸収するときに生じる状態の s'_L，b'_L も，d_L，s_L，b_L の（正規直交な）1 次結合で，

$$s'_L = V_{cd}d_L + V_{cs}s_L + V_{cb}b_L \tag{9.1 b}$$

$$b'_L = V_{td}d_L + V_{ts}s_L + V_{tb}b_L \tag{9.1 c}$$

と表せる．したがって，d'_L，s'_L，b'_L は d_L，s_L，b_L とユニタリー行列 V で次のように結ばれている．

$$\begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

この行列を**カビボ－小林－益川行列**という．弱い相互作用の関与する諸現象の実験結果とユニタリー性を使うと，行列要素の絶対値は，90 % の信頼

度で

$$\begin{pmatrix} 0.9741 \sim 0.9756 & 0.219 \sim 0.226 & 0.0025 \sim 0.0048 \\ 0.219 \sim 0.226 & 0.9732 \sim 0.9748 & 0.038 \sim 0.044 \\ 0.004 \sim 0.014 & 0.037 \sim 0.044 & 0.9990 \sim 0.9993 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

と表される．

異なる世代のクォークは無関係ではなく，弱い相互作用によって異なる世代のクォークの混合が生じている．6つの状態 $\mathrm{d_L}$，$\mathrm{s_L}$，$\mathrm{b_L}$，$\mathrm{d'_L}$，$\mathrm{s'_L}$，$\mathrm{b'_L}$ の位相を適切に選ぶと，3行3列のユニタリー行列 V は，4つの角 θ_{12}，θ_{13}，θ_{23}，δ_{13} を使って

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

と表される．$c_{12} = \cos\theta_{12}$，$s_{12} = \sin\theta_{12}$ で，θ_{ij} は i 番目の世代と j 番目の世代の混合を表すパラメータである．(9.3) から

$$\theta_{12} \sim 0.2 \equiv \lambda, \qquad \theta_{23} = O(\lambda^2), \qquad \theta_{13} = O(\lambda^3) \tag{9.5}$$

であり，世代間の混合の強弱の様子がわかる．

(9.4) の行列要素には複素数 $e^{i\delta_{13}}$ が現れる．フェルミオンが2世代の場合には d，s，d′，s′ の位相を適切に選べば，2行2列のユニタリー行列のすべての行列要素を

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

と実数にできるのとは大きな違いである．以下で示すように，この複素数の行列要素が，素粒子の CP 不変性を破る原因になる．

i 番目の世代の電荷 $2e/3$, $-e/3$ のクォークの左巻き成分を $\mathrm{U}_{i\mathrm{L}}$，$\mathrm{D}_{i\mathrm{L}}$ と記すと，(9.2) の i 行 j 列の行列要素 V_{ij} を使って，反応 $\mathrm{U}_{i\mathrm{L}} \to \mathrm{D}_{j\mathrm{L}} + \mathrm{W}^+$ の摂動論の最低次の行列要素は $A(\mathrm{U}_{i\mathrm{L}} \to \mathrm{D}_{j\mathrm{L}} + \mathrm{W}^+) = gV_{ij}$ と表される．

この反応の始状態と終状態に，空間反転Pと荷電共役変換Cを続けて行う，**CP変換**を行った場合の反応 $\bar{\mathrm{U}}_{i\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{D}}_{j\mathrm{R}} + \mathrm{W}^-$ の摂動論の最低次の行列要素は，複素共役の $A(\bar{\mathrm{U}}_{i\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{D}}_{j\mathrm{R}} + \mathrm{W}^-) = gV_{ij}{}^*$ である．したがって，$V_{ij}{}^* \neq V_{ij}$ ならば，CP変換で結ばれている2つの反応の遷移振幅が異なることになるので，カビボ－小林－益川行列に現れる角 δ_{13} が0でなければ，標準理論ではCP不変性が破れていることになる．これが，標準模型でのCP非保存に対する**小林－益川模型**である．

§9.4　中性K中間子，中性B中間子とCP不変性の破れ

中性のK中間子には，$\mathrm{K}^0(\mathrm{d\bar{s}})$ とその反粒子の $\overline{\mathrm{K}}{}^0(\mathrm{s\bar{d}})$ がある．dクォークと反sクォーク各1個から構成されている K^0 のストレンジネスは $S = 1$ で，sクォークと反dクォーク各1個から構成されている $\overline{\mathrm{K}}{}^0$ のストレンジネスは $S = -1$ である．したがって，ストレンジネスを保存する強い相互作用による反応では，K^0 が作られたのか $\overline{\mathrm{K}}{}^0$ が作られたのかは明らかである．

しかし，ストレンジネスを保存しない弱い相互作用による崩壊では，K^0 も $\overline{\mathrm{K}}{}^0$ もストレンジネスが1だけ変化して，$\pi^+ + \pi^-$，$\pi^0 + \pi^0$，$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$，$\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ などの $S = 0$ の状態に崩壊する．したがって，このような崩壊現象からは，K^0 が崩壊したのか $\overline{\mathrm{K}}{}^0$ が崩壊したのかわからない．さらに，K^0 中間子は崩壊する前に，$\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^- \to \overline{\mathrm{K}}{}^0$ などの量子力学に特有な仮想的過程で，$\overline{\mathrm{K}}{}^0$ 中間子に変化することもある．この過程を $\mathbf{K^0\overline{K}{}^0}$ **振動**という．

さて，崩壊現象だけを眺めていると，K^0 中間子と $\overline{\mathrm{K}}{}^0$ 中間子ではなく，平均寿命が $\tau_\mathrm{S} = 8.9 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}$ で，2個のパイ中間子に崩壊する $\mathrm{K_S}^0$ 中間子

$$\mathrm{K_S}^0 \;\to\; \pi^+ + \pi^-, \qquad \mathrm{K_S}^0 \;\to\; \pi^0 + \pi^0$$

と，平均寿命 τ_L が $\mathrm{K_S}^0$ 中間子よりは長く，$\tau_\mathrm{L} = 5.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$ で，3個のパイ中間子に崩壊する $\mathrm{K_L}^0$ 中間子

$$K_L{}^0 \ \to \ \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \qquad K_L{}^0 \ \to \ \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$$

の2種類が存在するようにみえる．

これらの崩壊で発生するパイ中間子の相対軌道角運動量は実験によれば0で，パイ中間子のパリティは -1 なので，終状態 $\pi^+ + \pi^-$ と $\pi^0 + \pi^0$ のパリティは $+1$，終状態 $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ と $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ のパリティは -1 である（第7章の演習問題［4］参照）．粒子と反粒子を入れ換える荷電共役変換（C変換）では $\pi^+ \to \pi^-$，$\pi^0 \to \pi^0$，$\pi^- \to \pi^+$ と変換するので，発生するパイ中間子の相対軌道角運動量が0であることとパイ中間子のスピンが0であることを考慮すると，4つの終状態はすべて荷電共役変換で不変である．したがって，荷電共役変換と空間反転（P変換）を同時に行うCP変換で，$\pi^+ + \pi^-$ と $\pi^0 + \pi^0$ は不変で（$\mathrm{CP} = 1$），$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ と $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ は符号を変える（$\mathrm{CP} = -1$）．

一方，空間反転では K^0 は $-K^0$ に，$\overline{K}{}^0$ は $-\overline{K}{}^0$ に変換する．そこで，荷電共役変換で K^0 は $-\overline{K}{}^0$ に，$\overline{K}{}^0$ は $-K^0$ に変換するように状態の位相を選ぶと，CP変換では $K^0 + \overline{K}{}^0$ は $K^0 + \overline{K}{}^0$ に，$K^0 - \overline{K}{}^0$ は $-(K^0 - \overline{K}{}^0)$ になる．したがって，弱い相互作用がCP変換で不変ならば，

$$K_S{}^0 = \frac{K^0 + \overline{K}{}^0}{\sqrt{2}}, \qquad K_L{}^0 = \frac{K^0 - \overline{K}{}^0}{\sqrt{2}} \tag{9.7}$$

ということになる．

その結果，強い相互作用によって発生した K^0 と $\overline{K}{}^0$ は

$$K^0 = \frac{K_S{}^0 + K_L{}^0}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{K}{}^0 = \frac{K_S{}^0 - K_L{}^0}{\sqrt{2}} \tag{9.8}$$

と表されるので，K^0 も $\overline{K}{}^0$ も発生してからしばらく経つと，短寿命の $K_S{}^0$ 成分は先に崩壊して，長寿命の $K_L{}^0$ 成分のみが残る．したがって，弱い相互作用でCP不変性が成り立てば，長時間崩壊しなかった K^0 中間子が2個のパイ中間子に崩壊することはない．

1964年にクローニン，フィッチと共同研究者が $K_L{}^0$ の π^+ と π^- への崩

壊，$K_L{}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ を発見したので，弱い相互作用が CP 不変ではないことがわかった．ただし，$K_L{}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊速度は $K_S{}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊速度の 5×10^{-6} 倍なので，CP 不変性の破れは小さい．

現時点では，K^0 中間子の崩壊における CP 不変性の破れは標準模型とは矛盾しないことがわかっている．しかし，この場合の CP 不変性の破れは小さく，カビボ - 小林 - 益川行列に現れる複素数の因子 $e^{i\delta_{13}}$ の値などを求めることは困難である．

K^0 中間子の崩壊で CP 不変性の破れが小さい理由は，カビボ - 小林 - 益川行列で虚数部と実数部の比が大きい行列要素は第 3 世代のクォークに関係した V_{ub} と V_{td} だけなので，第 3 世代のクォークを含まない K 中間子の崩壊への効果が小さいからである．

しかし，第 3 世代のクォークを含む B^0 中間子（$d\bar{b}$）と $\bar{B}^0$ 中間子（$b\bar{d}$）の崩壊では CP 不変性の破れが大きく，理論と実験の比較が容易であることが，1980 年に三田一郎たちによって指摘された．そこで，B^0 中間子を大量に作り出して，その崩壊を高い精度で研究することを目的とする電子 - 陽電子衝突型加速器の B 中間子工場（B-Factory）の KEKB が日本に，PEP - II が米国に建設され，2001 年に

$$(B^0, \bar{B}^0) \quad \to \quad J/\psi(1\,S) + (K_S{}^0, K_L{}^0)$$

崩壊で CP 不変性の破れが発見された．

カビボ - 小林 - 益川行列要素の満たす関係

$$V_{ub}{}^* + V_{td} = \sin\theta_{12} V_{cb}{}^* \qquad (9.9)$$

をガウス平面（複素平面）上に描くときに，V_{td} と $V_{cb}{}^*$ がなす角を ϕ_1 とすると（図 9.1 参照）$\sin 2\phi_1$ が確実に 0 ではないことが確かめられたからである（$\sin 2\phi_1 = 0.78 \pm 0.08$）．

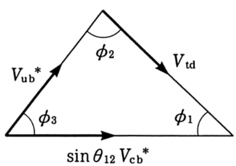


図 9.1　ガウス平面上に行列要素 $V_{ub}{}^*$, V_{td}, $\sin\theta_{12}\ V_{cb}{}^*$ が描く三角形［(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) を (β, α, γ) と記す記法もある］

なお，CP 不変性の破れは，宇宙に電子，陽子，中性子が陽電子，反陽子，反中性子よりも

はるかに多く存在する事実を説明できるための条件の１つである．

§9.5　大気ニュートリノと太陽ニュートリノ

標準理論とは矛盾する実験結果として，大気ニュートリノと太陽ニュートリノの問題がある．この問題は，ニュートリノが極めて小さな質量をもつために生じるニュートリノ振動現象として理解される．この節では，まず実験結果を紹介する．

宇宙線と大気ニュートリノ

箔検電器を帯電させて金属箔を開かせても，金属箔はやがて閉じてしまう．これは，空気中のイオンが金属箔の電気を中和するからである．空気中のイオンは地殻中の放射性元素の崩壊によっても作られるが，それだけでは説明がつかない．

1911～12 年にヘスは，高さ 5000 メートルまで気球を何回か飛翔させ，5000 メートルの上空では地表付近よりも空気中でイオンがたくさんできていることを確かめた．この結果，大気圏外から地球大気の中にやってくる透過性の強い放射線が存在することを突き止めた．この放射線を**宇宙線**とよぶ．宇宙線の発生源については未知な点も多いが，超新星は主な発生源の１つだと考えられている．

地球の大気圏に降りそそぐ宇宙線（1 次宇宙線という）の 90％以上は陽子である．1 次宇宙線が大気の原子核と衝突して発生する素粒子を 2 次宇宙線という．2 次宇宙線としては，まずパイ中間子が大量に作られ，パイ中間子の崩壊でミュー粒子が大量に生成される．ミュー粒子は地表の 10 cm^2 に 1 秒間に約 1 個の割合で降りそそいでいる．

2 次宇宙線として作られたパイ中間子は，

$$\pi^+ \;\to\; \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \pi^- \;\to\; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

と崩壊して，ミュー粒子とミューニュートリノになり，ミュー粒子は，

$$\mu^+ \;\to\; \mathrm{e}^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mathrm{e}, \qquad \mu^- \;\to\; \mathrm{e}^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

と崩壊する．したがって，地球の大気中で大量のニュートリノが発生する．これを**大気ニュートリノ**という．この 2 段階過程で生成されるミューニュートリノの数 $n(\nu_\mu)$ と電子ニュートリノの数 $n(\nu_e)$ の比は，

$$n(\nu_\mu) : n(\nu_e) = 2 : 1$$

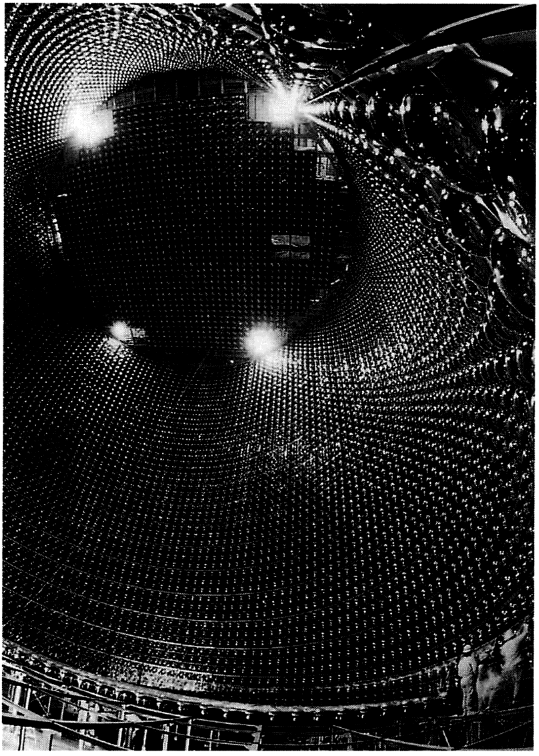


図 9.2　スーパーカミオカンデ検出器．この検出器は，5 万トンの純水を蓄えた直径 39.3 m，高さ 41.4 m の円筒形水タンクと，その壁の全面に設置された光電子増倍管とよばれる 11146 本の光センサー（直径 50 cm）などから構成されている．この写真は水を注入する前のタンクの内面である．
（東京大学宇宙線研究所神岡宇宙素粒子研究施設 提供）

である．

ところが，岐阜県神岡鉱山の山の頂上から約1000 m 下の場所に設置されたスーパーカミオカンデ検出器（図9.2）による測定結果によれば，この比は2：1ではなく，約1.2：1であることがわかった．さらに，検出器に上の方（天頂の方）からやってくるニュートリノはほぼ予想通りの数が観測されたが，検出器に下の方（地球の裏側）からやってくるミューニュートリノは予想される数の約半分くらいしかなかった（図9.3）．

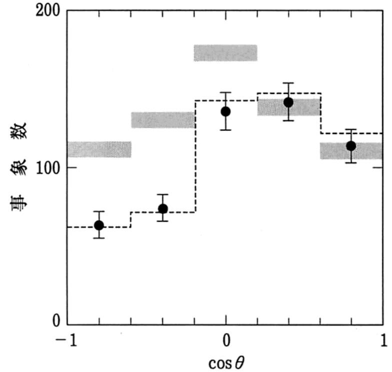


図9.3　ニュートリノ振動を示す大気ニュートリノ事象の天頂角分布．$\cos\theta = 1$ は下向き，$\cos\theta = -1$ は上向きに対応する．図から明らかなように，上向きの事象は下向きの事象に比べて異常に少ない．陰影をつけた分布はニュートリノ振動がない場合，点線はニュートリノ振動がある場合の理論分布を示す．

ニュートリノと物質の相互作用は極めて小さいので，ニュートリノビームが地球の中で減衰することを標準模型では説明できない．この現象は，ミューニュートリノが地球を通過する間にタウニュートリノになったためだと考えられる（次節参照）．

太陽ニュートリノ

太陽の放射するエネルギーの源は，温度 1.55×10^7 K の太陽の中心部で，水素原子核が核融合してヘリウム原子核になるときに解放される核エネルギーである．この核融合はいくつかの過程で起こるが，最終的には

$$p + p + p + p + e^- + e^- \ \rightarrow \ \mathrm{He} + \nu_e + \nu_e + 26.7\,\mathrm{MeV}$$

とまとめられる．

地球の大気圏外で太陽に正対する 1 m^2 の面積が，1 秒間に受ける太陽の放射エネルギーは 1.37 kJ である．これを**太陽定数**という．この事実から，太陽は 1 秒間に 3.85×10^{26} J のエネルギーを放射していることがわかる．したがって，太陽では 1 秒間に約 6.0×10^{11} kg の水素が核融合していることになる．このとき莫大な数のニュートリノが発生し，地球にも大量のニュートリノが到達している．これを**太陽ニュートリノ**という．

図 9.4 に，スーパーカミオカンデ検出器での実験結果を示す．太陽からの電子ニュートリノが $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$ 反応（図 9.5(a)，(b)）で発生させた電子が，太陽ニュートリノの進行方向（$\theta_{sun} = 0$ 付近）にある電子分布のピークである．この実験で叩き出された電子の数から計算される太陽から来

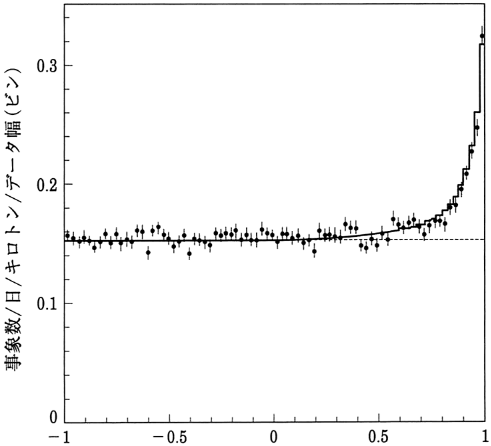


図 9.4　スーパーカミオカンデ検出器内部で叩き出された電子の方向分布．角 θ_{sun} は太陽から飛んできた粒子の進行方向と叩き出された電子の進行方向のなす角である．図中の誤差棒つきのデータポイントは，1 日につき水槽の中心部の水 1000 t からその方向（$\cos\theta_{sun}$ が棒の両側 ± 0.0125 の範囲）に叩き出された 6.5 MeV 以上のエネルギーをもつ電子の数を示す．したがって，図の右端（$\cos\theta_{sun} = 1$）付近の山は太陽からのニュートリノによって叩き出された電子を表す．横の点線はバックグランドを表す．

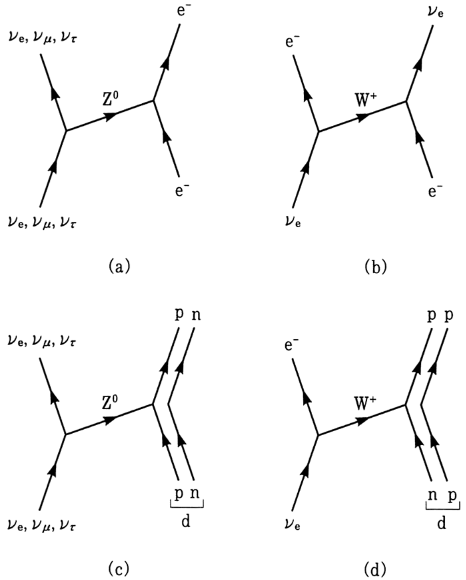


図 9.5　(a)　$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$,　$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$,
$\nu_\tau + e^- \rightarrow \nu_\tau + e^-$
(b)　$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$（荷電カレント反応）
(c)　$\nu_e + d \rightarrow \nu_e + p + n$,　$\nu_\mu + d \rightarrow \nu_\mu + p + n$,
$\nu_\tau + d \rightarrow \nu_\tau + p + n$
(d)　$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p$

た電子ニュートリノの強度は，標準太陽模型での理論値の約半分である．この実験結果も，標準模型では説明できない．

カナダのサドベリー・ニュートリノ観測所（SNO）では 1000 t の重水（D_2O）を使うので，

$$\nu_e + d \rightarrow \nu_e + p + n, \quad \nu_\mu + d \rightarrow \nu_\mu + p + n,$$
$$\nu_\tau + d \rightarrow \nu_\tau + p + n$$

（図 9.5(c)）や

$$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p$$

(図 9.5(d)) などの結合エネルギーの小さな重水素が解離する反応が測定でき，電子ニュートリノビームとほかの 2 種類のニュートリノビームを区別して測定できる.

スーパーカミオカンデと SNO の両方の観測結果から，太陽では標準太陽模型の予想通りの数の電子ニュートリノが発生し，その約半分は太陽から地球に到達するまでにミューニュートリノとタウニュートリノになることがわかった.

§9.6　ニュートリノの質量とニュートリノ振動

レプトンのフレーバーとその保存

3 種類の荷電レプトンの電子，ミュー粒子，タウ粒子には，それぞれに特有なラベルが付いているように思われる．たとえば，

$$\mu^{\pm} \;\to\; \mathrm{e}^{\pm} + \gamma, \qquad \tau^{\pm} \;\to\; \mathrm{e}^{\pm} + \gamma, \qquad \tau^{\pm} \;\to\; \mu^{\pm} + \gamma$$

という崩壊は観測されていない．タウ粒子やミュー粒子が電子の励起状態であれば，原子の励起状態が基底状態や低い励起状態にガンマ崩壊するように，上の 3 つのガンマ崩壊が起こるはずである.

また，電子ニュートリノ，ミューニュートリノ，タウニュートリノにも別々のラベルが付いているように思われる．たとえば，正電荷のパイ中間子 π^{+} の崩壊で正電荷のミュー粒子 μ^{+} と一緒に発生するミューニュートリノ ν_{μ} のビームを陽子に照射する実験で

$$\nu_{\mu} + \mathrm{p} \;\to\; \mu^{-} + \text{ハドロン}, \qquad \nu_{\mu} + \mathrm{p} \;\to\; \nu_{\mu} + \text{ハドロン}$$

という反応は起こるが,

$$\nu_{\mu} + \mathrm{p} \;\to\; \mathrm{e}^{-} + \text{ハドロン}, \qquad \nu_{\mu} + \mathrm{p} \;\to\; \nu_{\mathrm{e}} + \text{ハドロン}$$

という反応は起こらない.

これらの実験事実は，電子と電子ニュートリノは第 1 世代のレプトンのフレーバーである電子数 N_{e}，ミュー粒子とミューニュートリノは第 2 世代のレプトンのフレーバーであるミュー粒子数 N_{μ}，タウ粒子とタウニュートリノ

は第3世代のレプトンのフレーバーであるタウ粒子数 N_τ をもっているとすれば説明できることを§7.5で説明した．

ニュートリノの質量

弱い相互作用によって，異なる世代のクォークの間での相互転化は起こるが，異なる世代のレプトンの間での相互転化は起こらず，レプトンは N_e，N_μ，N_τ という3つの保存量をもつように思われる．§9.3で学んだように，異なる世代のクォークの間での相互転化が生じる原因はクォークの質量であった．そこでニュートリノの質量について調べよう．

ニュートリノという名前は，電気的に中性で質量の小さな粒子という意味である．^{3}H 原子核の ^{3}He 原子核へのベータ崩壊 $^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \mathrm{e}^- + \nu_\mathrm{e}$ の実験で電子の運動エネルギー・スペクトルを調べ，その最大値 E_max を測定すると，発生する電子ニュートリノの最小エネルギー，すなわち，静止エネルギー $m_\nu c^2$ が求められる．実験によれば，電子ニュートリノの質量は約 3 eV/c^2 以下である．これは電子の質量の10万分の1以下で，極めて小さい．

パイ中間子の崩壊実験 $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$ でパイ中間子とミュー粒子の運動量を精密測定し，パイ中間子とミュー粒子の質量の実験値を使うことで，ミューニュートリノの質量は 0.19 MeV/c^2 以下であることがわかっている（演習問題［4］参照）．タウニュートリノの質量の上限は 18.2 MeV/c^2 である．

長い間ニュートリノの質量の精密な測定が行われてきたが，質量が0ではないという確実な実験結果は存在しなかった．この結果，ニュートリノの質量は0であると考えられるようになり，標準模型では，ニュートリノの質量は0だとした．

質量が0だと考えられている光子の場合には，理論のゲージ不変性によって質量が0であることが要求されている．しかし，ニュートリノの質量が0である理論的根拠は存在しない．そこで，ニュートリノは微小な質量をもつ可能性がある．ニュートリノがヒグスボソンと相互作用して，ヒグス機構で

質量をもてば，クォークと同じように世代の混合が生じるはずである．

ニュートリノ振動

質量の異なる3つのニュートリノ ν_1, ν_2, ν_3 が存在し，ν_e, ν_μ, ν_τ はそれらが混合したものだとしよう．そうすると，たとえば，ν_e は

$$\nu_e = U_{e1}\nu_1 + U_{e2}\nu_2 + U_{e3}\nu_3 \tag{9.10 a}$$

と表せ，ν_μ と ν_τ も同じように，

$$\nu_\mu = U_{\mu 1}\nu_1 + U_{\mu 2}\nu_2 + U_{\mu 3}\nu_3 \tag{9.10 b}$$

$$\nu_\tau = U_{\tau 1}\nu_1 + U_{\tau 2}\nu_2 + U_{\tau 3}\nu_3 \tag{9.10 c}$$

と表せる．(9.10) はクォークの場合の (9.1) に対応する表現である．したがって，ν_e, ν_μ, ν_τ はカビボ－小林－益川行列 (9.4) に対応する行列によって，ν_1, ν_2, ν_3 と結び付けられる．

ここでは簡単のため，

$$\left.\begin{aligned} \nu_e &= \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta \\ \nu_\mu &= -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta \\ \nu_\tau &= \nu_3 \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

と表せる場合を考えよう．

運動量 p をもつミューニュートリノの波動関数は，発生してから時間 t が経過すると，

$$\nu_\mu(t) = -\nu_1 \sin\theta \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) + \nu_2 \cos\theta \exp\left(-\frac{iE_2 t}{\hbar}\right) \tag{9.12}$$

となる．ν_1, ν_2 の質量を m_1, m_2 とし，$m_1 \neq m_2$ とすると，ν_1, ν_2 のエネルギーは異なり，$E_1 \neq E_2$ なので，(9.12) の右辺の2項は干渉し合う．(9.11) から導かれる，

$$\nu_1 = \nu_e \cos\theta - \nu_\mu \sin\theta$$

$$\nu_2 = \nu_e \sin\theta + \nu_\mu \cos\theta$$

を使って，(9.12) の右辺の ν_1, ν_2 を ν_μ, ν_e で表すと，時刻 $t=0$ に発生

したミューニュートリノが時刻 t にミューニュートリノである確率 $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ は

$$
\begin{aligned}
P(\nu_\mu \to \nu_\mu) &= |\,\nu_\mu(t) \text{ の } \nu_\mu \text{ 成分}|^2 \\
&= \left|\sin^2\theta \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) + \cos^2\theta \exp\left(-\frac{iE_2 t}{\hbar}\right)\right|^2 \\
&= 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}\left\{1 - \cos\left[\frac{(E_1 - E_2)\,t}{\hbar}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{9.13}
$$

である．ここで，$p/c \gg m_1$，m_2 なので，

$$
\begin{aligned}
E_2 - E_1 &= [(pc)^2 + (m_2 c^2)^2]^{1/2} - [(pc)^2 + (m_1 c^2)^2]^{1/2} \\
&\fallingdotseq \frac{(m_2{}^2 - m_1{}^2)\,c^3}{2p}
\end{aligned}
$$

を使うと（c は真空中の光速），(9.13) は

$$
P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left[\frac{(m_2{}^2 - m_1{}^2)\,c^3 t}{4\hbar p}\right] \tag{9.14}
$$

となる．また，時刻 t に ν_μ が ν_e に転化している確率 $P(\nu_\mu \to \nu_e)$ は

$$
P(\nu_\mu \to \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2\left[\frac{(m_2{}^2 - m_1{}^2)\,c^3 t}{4\hbar p}\right] \tag{9.15}
$$

となる．したがって，このような実験でミューニュートリノ・ビームの減少や電子ニュートリノの発生が発見されたら，混合角 θ と共に，ニュートリノの質量差 $m_2{}^2 - m_1{}^2$ がわかることになる．

このように，ニュートリノが質量をもつと，レプトンのフレーバーが変化し，ニュートリノが飛行するのにつれて別のフレーバーのニュートリノになったり，もとのフレーバーのニュートリノに戻ったりする．これを**ニュートリノ振動**，あるいはニュートリノのフレーバーの振動という．ニュートリノが距離 D 移動すると，$t \fallingdotseq D/c$ なので，(9.14) は

$$
P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left[\frac{1.27\Delta m^2[\mathrm{eV}^2]\,D[\mathrm{km}]}{E[\mathrm{GeV}]}\right] \tag{9.16}
$$

と表される．ここで，$\Delta m^2 = m_2{}^2 - m_1{}^2$ である．

質量差 Δm^2 が小さい場合にニュートリノの振動現象を観測するには，距離 D を大きくする必要がある．このために，宇宙空間からやってくる宇宙線の陽子と大気の上層部の原子核との衝突で発生するパイ中間子の崩壊で発生するミューニュートリノや，太陽の中心部で起こる核融合反応で発生する電子ニュートリノの利用が考えられる．

前節で紹介した大気ニュートリノと太陽ニュートリノの実験結果の解析から，ニュートリノには極めて小さい質量があることが明らかになった．また，ニュートリノの質量の固有状態 ν_1，ν_2，ν_3 と弱い相互作用で生成，消滅する状態 ν_e，ν_μ，ν_τ の関係は図 9.6 のようになっていることがわかった．

フレーバーの異なるニュートリノの間で振動現象が起こる可能性は，牧二郎，中川昌美，坂田昌一によって 1962 年に指摘された．

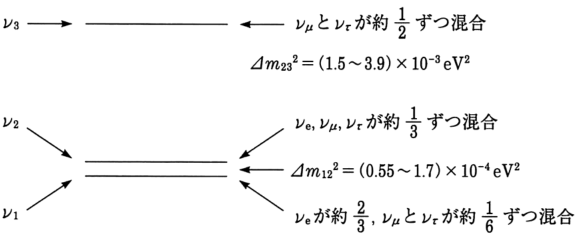


図 9.6　3 種類のニュートリノの質量と混合の概念図（本文の理解を助けるための定性的な概念図であることに注意）．$\Delta m_{ij}{}^2 = |m_i{}^2 - m_j{}^2|$．質量 m_1 の ν_1 と質量 m_2 の ν_2 のどちらが重いのか，そして質量 m_3 の ν_3 が一番重いのか，あるいは一番軽いのかは実験からはわかっていない．

演 習 問 題

［**1**］ K^0 か $\overline{K}^0$ が崩壊して，終状態が，

(a)　$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

(b)　$\pi^- + e^+ + \nu_e$

になった．(a)，(b) それぞれの始状態は K^0 か $\overline{K}^0$ か．

［**2**］（1） 反応 $U_{iL} \to D_{jL} + W^+$ を荷電共役変換した反応 $\bar{U}_{iL} \to \bar{D}_{jL} + W^-$ は，現実には起こらない反応であることを示せ．

（2） 反応 $U_{iL}(\boldsymbol{p}_i) \to D_{jL}(\boldsymbol{p}_j) + W^+(\boldsymbol{p}_W)$ を荷電共役変換し，続いて空間反転した反応を反応面に垂直な直線の周りに 180° 回転した反応は，$\bar{U}_{iR}(\boldsymbol{p}_i) \to \bar{D}_{jR}(\boldsymbol{p}_j) + W^-(\boldsymbol{p}_W)$ であることを示せ．

［**3**］ 3種類のレプトンのフレーバー N_e，N_μ，N_τ が保存するというアイディアで，$\mu^\pm \to e^\pm + \gamma$ という崩壊が起こらない事実を説明せよ．

［**4**］ 静止している π 中間子が $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$ と崩壊して発生したミュー粒子の運動量が p_μ，エネルギーが E_μ であれば，ミューニュートリノの質量 m_ν は

$$m_\nu{}^2 = m_\pi{}^2 + m_\mu{}^2 - \frac{2E_\mu m_\pi}{c^2}$$

であることを示せ．

小柴昌俊博士とカミオカンデ検出器

2002年度のノーベル物理学賞の受賞者に「天体物理学，特に宇宙ニュートリノの検証にパイオニア的貢献をした」との理由で，超新星からのニュートリノを史上初めて観測することに成功した，小柴昌俊博士が選ばれた．物理学ばかりでなく，音楽鑑賞を通じても親しくさせて頂いている小柴さんの受賞は嬉しいニュースである．

小柴さんは小学生に「夢のたまごを持ち続けなさい」と呼び掛け，「たまごを大事に育ててやってください」と励ましているが，学生には「研究者になろうというなら，いつかは物にしたいという研究の卵を3つ4つ抱えておけよ．そうすれば，情報過多の中でもどんな情報を取りどんな情報を無視するか効率良く判断できるぞ」といい続けてこられたそうである．

大統一理論で予想された陽子崩壊（第10章を参照）を検出するために，3000tの水を岐阜県神岡鉱山の地下1000mに貯え，それを1000本の直径50cmの光電子増倍管で囲んだカミオカンデ検出器の建設を小柴さんは1978年に提案し，1983年に実験を開始した．KamiokandeのNDEは，Nucleon Decay Experiment（核子崩壊実験）の頭文字である．この実験では，目指す陽子の崩壊は見つからなかったが，17万年前に起きた超新星の爆発で発生したニュートリノを1987年2月23日グリニッジ標準時で午前7時35分に11個観測し，ニュートリノ天体物理学という新しい学問分野を切り拓いたのであった．

この検出器を大型化したスーパーカミオカンデ検出器（図9.2参照）による実験で，太陽ニュートリノとその振動現象が発見され，大気ニュートリノの振動現象が発見されたことは§9.5で紹介した．

カミオカンデ検出器を見学した際に宿泊した高山市の民宿で，同宿だった南部陽一郎博士が「陽子の崩壊を祈る」と色紙に書かれたが，私の思いも同じである．

10 おわりに

これまでの素粒子研究の成果が，第 7，8，9 章で学んだ素粒子の標準模型である．この標準模型は，第 9 章で紹介したニュートリノ振動以外のすべての実験結果を，高い精度で説明する．

しかし，大きな問題が残っている．代表的な問題として，なぜ 3 世代の基本粒子が存在するのかという世代の問題と質量の問題がある．標準模型は，クォークの質量やニュートリノを含めたレプトンの質量に対して何の予言もできない．質量の起源だとされている素粒子のヒグスボソンも未発見である．

これまで見てきたように，素粒子物理学の歴史では，予想もしなかった素粒子や現象が発見されてきた．これからもそのような歴史がくり返すのではなかろうか．楽しみである．これから素粒子物理学がどのように発展していくのかはわからないが，標準理論を超える理論として研究されている大統一理論と超対称理論を簡単に紹介する．

§ 10.1 大統一理論

強，電磁，弱，重力という自然界の 4 つの基本的な相互作用の中で，電磁相互作用と弱い相互作用は密接に関連しており，電弱統一模型で統一された．この統一模型は，結合定数が g_2 の $SU(2)$ 対称なゲージ理論と結合定数が g_1 の $U(1)$ 対称なゲージ理論から構成されている（ゲージ理論については付録 D を参照）．したがって，統一模型とはいっても 2 つの相互作用が独立に存在するので，電弱統一模型を $SU(2) \times U(1)$ 模型とよぶ．強い相互

作用の理論のQCDは結合定数 g_3 をもつ $SU(3)$ 対称なゲージ理論なので，素粒子の標準模型を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 模型とよぶことがある．

大統一理論とは，3つのゲージ理論は1つの結合定数 g をもつ統一的なゲージ理論が自発的に破れた結果として生じたものである，という理論である．

大統一理論によれば，対称性が自発的に破れていない超高エネルギー領域では強い相互作用と弱い相互作用の区別がなくなるので，強い相互作用の有無で区別される基本粒子のクォークとレプトンの区別がなくなり，レプトン数の保存則およびクォークと結び付いたバリオン数の保存則はもはや成り立たなくなる．その結果，たとえば陽子が $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$ という崩壊を行って陽電子とパイ中間子になる可能性がある．

大統一理論を構築する際の問題は，大きな結合定数 g_3 をもつQCDと小さな結合定数 g_2，g_1 をもつ電弱統一作用を，共通の結合定数 g をもつ大統一理論にどのようにして融合するのかである．この問題は，相互作用の強さはエネルギーと共に変化するという事実で解決される．

QCDでは，クォーク間の強い相互作用は近距離になると弱くなる(§8.5)．高エネルギーでは，クォークは近距離まで近づくのでクォーク間の強い相互作用は弱くなる．同様に，$SU(2)$ 相互作用も高エネルギーでは弱くなる．ただし，ゲージボソンの種類数が3で8より少ないので，QCDの場合よりも弱まり方は遅い．一方，$U(1)$ 相互作用は，高エネルギーになると遮蔽効果のために強くなる（§8.5参照)．

その結果，図10.1に示すように，エネルギーが高くなるにつれて，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 模型の3つの相互作用の強さは互いに近づき，10^{14} GeV付近で接近する．もし3本の線が1点で交われば，3つの相互作用の大統一が可能になる．

これがジョージアイとグラショウが提案した，$SU(5)$ 対称性に基づく $SU(5)$ 大統一理論である．大統一理論のゲージボソンの中には，dクォー

クを陽電子に変換したり，反uクォークをuクォークに変換したりする電荷が ± $4e/3$ のXボソン，およびdクォークを反電子ニュートリノに変換する電荷が ± $e/3$ のYボソンが存在する．この2種類のゲージボソンの静止エネルギー $m_{X}c^2 \approx m_{Y}c^2$ は，大統一理論の $SU(5)$ 対称性が自発的に破れるエネルギー E_{GUT} にほぼ等しいと予想される．

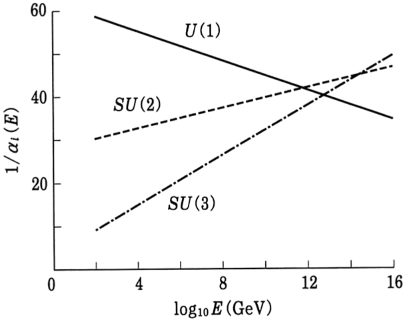


図 10.1　$SU(5)$ 大統一理論での結合定数 $\alpha_i(E)^2 = g_i(E)^2/4\pi$ のエネルギー依存性

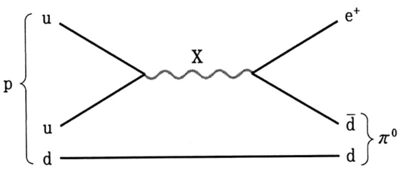


図 10.2　大統一理論での核子の崩壊過程の例：$p^+ \to e^+ + \pi^0$

さて，XボソンやYボソンが存在すると，質量が一番小さいバリオンなので安定だと考えられている陽子も不安定になり，図10.2に示す過程などで崩壊する．ただし，陽子の崩壊速度はX，Yボソンの質量の4乗に反比例するので，極めて遅く，$SU(5)$ 大統一理論では陽子の平均寿命は約 10^{29} 年だと予言される．そこでスーパーカミオカンデ検出器などを使って，$p^+ \to e^+ + \pi^0$ 崩壊などが $SU(5)$ 大統一理論で予想される頻度で起こるとすると検出可能な精度での実験が行われたが，陽子の崩壊は確認されておらず，$SU(5)$ 大統一理論の予言は実験的に否定された．

この結果および図10.1で3本の線が1点で交わらないことなどの理由で，最も簡単な大統一理論の $SU(5)$ 大統一理論は実験的に否定された．

§10.2 超対称理論

素粒子物理学の代表的なエネルギースケールとして，ハドロンの励起エネルギーの数百 MeV と電弱統一理論の対称性が自発的に破れる約 100 GeV がある．$SU(5)$ 大統一理論では，そのすぐ上の代表的なエネルギースケールは $SU(5)$ 対称性が自発的に破れる約 10^{14} GeV である．この 10^{14} GeV というエネルギースケールは，電弱統一理論の対称性を自発的に破るヒグスボソンの質量への量子力学的補正を極めて大きくするので，補正が大きくならないようにする，何らかの機構が必要である．その有力な候補の1つが超対称理論である．

超対称性とは，スピンが半奇数のフェルミオンとスピンが整数のボソンを関係づける対称性である．自然界が超対称であれば，すべての基本粒子は質量およびフレーバーが等しいフェルミオンとボソンがペアになって存在し，ペアの基本粒子の対応する結合定数は等しい．これが**超対称性**であり，基本粒子とペアのパートナーの粒子を**超対称粒子**という．超対称理論では，ペアのフェルミオンとボソンのそれぞれによる量子力学的補正は大きさが等しく逆符号だという性質がある．このために，ヒグスボソンの質量への量子力学的補正が極めて大きくなるという大統一理論の困難が解消する．

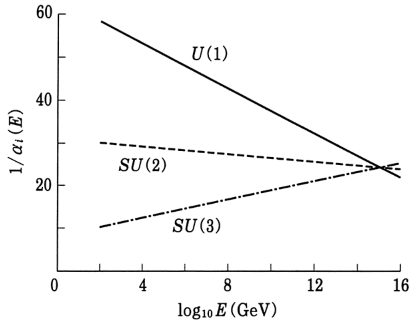


図 10.3 超対称 $SU(5)$ 大統一理論での結合定数 α_i のエネルギー依存性

しかし，標準理論のどの基本粒子にも同じ質量をもつパートナーの超対称粒子は発見されていないので，超対称性は，存在するにしても，破れた形でしか存在しない．破れた超対称理論が上述の困難を解決するために

は，超対称粒子の質量は約 1 TeV/c^2 以下でなければならない．現在までのところ，超対称粒子は 1 つも発見されていない．

超対称理論のもう 1 つの長所は，$SU(5)$ 大統一理論を超対称化した超対称 $SU(5)$ 大統一理論では，約 10^{16} GeV 付近で 3 つの結合定数が一致することである（図 10.3）．この理論での陽子の平均寿命は極めて長いので，実験とは矛盾しない．

これまでは重力を無視してきた．素粒子の質量はとても小さいので，質量の積に比例する重力はとても弱いからである．たとえば，陽子間に作用する重力の強さは電気力の強さの約 $1/10^{36}$ である．ところが，相対性理論によってエネルギーは質量と等価なので，重力はエネルギーの増加にともなってその強さを増す．陽子の質量の約 10^{19} 倍であるプランク質量 $M_P = \sqrt{\hbar c/G_N} = 10^{-5}$ g に対応するエネルギー $M_P c^2 \approx 10^{19}$ GeV 程度の極めて大きなエネルギー領域では，重力はほかの 3 つの力と同じ程度の強さの強い力になり，4 つの力がすべて統一的に理解できる可能性が生じる．

しかし，重力がエネルギーの増加にともなって強さを増すという性質は，重力に量子論を適用するときに困難を引き起こす．それは，2 つの素粒子の間で重力の仲立ちをするゲージボソンの重力子を複数個交換すると，いくらでも大きなエネルギーの重力子を交換できるので，限りなく大きな量子論的な効果が生じるという困難である．この困難を軽減できる理論として，超対称大統一理論に重力を統一した，**超重力理論**がある．

一般相対性理論では時空構造は物質によって決まるが，ミクロな現象では物質が量子論的な振舞を示すために時空構造が量子性を示す．時空構造の量子性が重要になるのは，プランク質量に対応するコンプトン波長のプランク長 $L_P = \sqrt{\hbar G_N/c^3} \approx 1.6 \times 10^{-35}$ m 程度のスケール以下である．ミクロな世界での重力現象を整合的に記述するには，量子論の枠組みと一般相対性理論を融合することが必要となる．このような理論は**量子重力理論**とよばれる．

付録 A　主な素粒子

表に記載したデータは，WWW の http://pdg.lbl.gov に掲載されている Particle Data Group, Review of Particle Physics の 2002 年版のデータを参考にしてまとめたものである．表の中の「主要崩壊モード」は，分岐比が 17 % 以上のものを大きい方から順に 2 つあるいは 3 つまで記した．すべての崩壊モードの分岐比が 17 % 以下の場合には，「多数」と記した．

表 A.1　ゲージボソンとヒグスボソン

名　前	記号	反粒子	スピン	質量 [GeV/c^2]	平均寿命 [s]	主要崩壊モード	備　考
光　子	γ^0	γ^0	1	0	安定		
グルオン	g^0	g^0	1	0 ?	安定		カラー 8 重項
W ボソン	W^+	W^-	1	80.423	3.108×10^{-25}	多数	
Z ボソン	Z^0	Z^0	1	91.1876	2.6379×10^{-25}	多数	
ヒグスボソン	H^0	H^0	0	>114.3	未発見		

表 A.2　レプトン

名　前	粒子	反粒子	スピン	質量 [MeV/c^2]	平均寿命 [s]	主要崩壊モード
電子ニュートリノ	${\nu_e}^0$	${\bar{\nu}_e}^0$	1/2	$< 3 \times 10^{-6}$	安定 ?	
ミューニュートリノ	${\nu_\mu}^0$	${\bar{\nu}_\mu}^0$	1/2	< 0.19	安定 ?	
タウニュートリノ	${\nu_\tau}^0$	${\bar{\nu}_\tau}^0$	1/2	< 18.2	安定 ?	
電　子	e^-	e^+	1/2	0.510998902	安定	
ミュー粒子	μ^-	μ^+	1/2	105.658357	2.19703×10^{-6}	$\rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
タウ粒子	τ^-	τ^+	1/2	1776.99	2.906×10^{-13}	$\rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau,\ \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$

表 A.3　ハドロン

	名　前	記号	構成	反粒子	スピン	質量 [MeV/c^2]	平均寿命 [s]	主要崩壊モード
メソン	π 中間子	π^+	$u\bar{d}$	π^-	0	139.57018	2.6033×10^{-8}	$\to \mu^+\nu_\mu$
		π^0	$u\bar{u}$, $d\bar{d}$	π^0	0	134.9766	8.4×10^{-17}	$\to 2\gamma$
	K 中間子	K^+	$u\bar{s}$	K^-	0	493.677	1.2384×10^{-8}	$\to \mu^+\nu_\mu$, $\pi^+\pi^0$
		K^0	$d\bar{s}$	$\bar{K}^0$	0	497.672	8.937×10^{-11} ($K_S{}^0$) 5.17×10^{-8} ($K_L{}^0$)	$\to \pi^+\pi^-$, $2\pi^0$ $\to \pi^- e^+ \nu_e$, $\pi^-\mu^+\nu_\mu$
	η 中間子	η^0	$u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$	η^0	0	547.30	5.58×10^{-19}	$\to 2\gamma, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
	η' 中間子	η'^0	$u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$	η'^0	0	957.78	3.26×10^{-21}	$\to \pi^+\pi^-\eta, \rho^0\gamma, 2\pi^0\eta$
	D 中間子	D^+	$c\bar{d}$	D^-	0	1869.3	1.051×10^{-12}	多数
		D^0	$c\bar{u}$	$\bar{D}^0$	0	1864.5	4.117×10^{-13}	多数
	D_s 中間子	$D_s{}^+$	$c\bar{s}$	$D_s{}^-$	0	1968.5	4.90×10^{-13}	多数
	B 中間子	B^+	$u\bar{b}$	B^-	0	5279.0	1.674×10^{-12}	多数
		B^0	$d\bar{b}$	$\bar{B}^0$	0	5279.4	1.542×10^{-12}	多数
	B_s 中間子	$B_s{}^0$	$s\bar{b}$	$\bar{B}_s{}^0$	0	5369.6	1.461×10^{-12}	多数
	B_c 中間子	$B_c{}^+$	$c\bar{b}$	$B_c{}^-$	0	6.4×10^3	4.6×10^{-13}	多数
バリオン	陽子	p^+	uud	$\bar{p}^-$	1/2	938.27200	安定	
	中性子	n^0	udd	$\bar{n}^0$	1/2	939.56533	885.7	$pe^-\bar{\nu}_e$
	Λ 粒子	Λ^0	uds	$\bar{\Lambda}^0$	1/2	1115.683	2.632×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$
	Σ 粒子	Σ^+	uus	$\bar{\Sigma}^-$	1/2	1189.37	8.018×10^{-11}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
		Σ^0	uds	$\bar{\Sigma}^0$	1/2	1192.642	7.4×10^{-20}	$\Lambda\gamma$
		Σ^-	dds	$\bar{\Sigma}^+$	1/2	1197.449	1.479×10^{-10}	$n\pi^-$
	Ξ 粒子	Ξ^0	uss	$\bar{\Xi}^0$	1/2	1314.83	2.90×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$
		Ξ^-	dss	$\bar{\Xi}^+$	1/2	1321.31	1.639×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$
	Ω 粒子	Ω^-	sss	$\bar{\Omega}^+$	3/2	1672.45	8.21×10^{-11}	ΛK^-, $\Xi^0\pi^-$
	Λ_c 粒子	$\Lambda_c{}^+$	udc	$\bar{\Lambda}_c{}^-$	1/2	2284.9	2.00×10^{-13}	多数
	Σ_c 粒子	$\Sigma_c{}^{++}$	uuc	$\bar{\Sigma}_c{}^{--}$	1/2	2452.6	3.3×10^{-22}	$\Lambda_c\pi^+$
		$\Sigma_c{}^+$	udc	$\bar{\Sigma}_c{}^-$	1/2	2451.3	$> 1.4 \times 10^{-22}$	$\Lambda_c\pi^0$
		$\Sigma_c{}^0$	ddc	$\bar{\Sigma}_c{}^0$	1/2	2452.2	4.1×10^{-22}	$\Lambda_c\pi^-$
	Ξ_c 粒子	$\Xi_c{}^+$	usc	$\bar{\Xi}_c{}^-$	1/2	2466.3	4.42×10^{-13}	多数
		$\Xi_c{}^0$	dsc	$\bar{\Xi}_c{}^0$	1/2	2471.8	9.8×10^{-14}	多数
	Ω_c 粒子	$\Omega_c{}^0$	ssc	$\bar{\Omega}_c{}^0$	1/2	2697.5	6.4×10^{-14}	多数
	Λ_b 粒子	$\Lambda_b{}^0$	udb	$\bar{\Lambda}_b{}^0$	1/2	5624	1.229×10^{-12}	多数

表 A.4　クォーク

記　号	スピン	電荷	バリオン数	質　量	量子数
u（アップ）	1/2	2/3	1/3	1.5～4.5 MeV/c^2	
d（ダウン）	1/2	−1/3	1/3	5～8.5 MeV/c^2	
s（ストレンジ）	1/2	−1/3	1/3	80～155 MeV/c^2	ストレンジネス＝−1
c（チャーム）	1/2	2/3	1/3	1.0～1.4 GeV/c^2	チャーム＝1
b（ボトム）	1/2	−1/3	1/3	4.0～4.5 GeV/c^2	ボトム＝−1
t（トップ）	1/2	2/3	1/3	174.3 GeV/c^2	トップ＝1

付録 B　湯川ポテンシャルの導出法

式 (5.13) を証明する．$V(\boldsymbol{r})$ を

$$V(\boldsymbol{r}) = \iiint d\boldsymbol{k}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, \tilde{V}(\boldsymbol{k}) \tag{B.1}$$

とフーリエ展開する．$\tilde{V}(\boldsymbol{k})$ は逆に

$$\tilde{V}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\boldsymbol{r}\ V(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{B.2}$$

と表される．(B.1) を (5.12) に代入し，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{k} \tag{B.3}$$

を使うと，

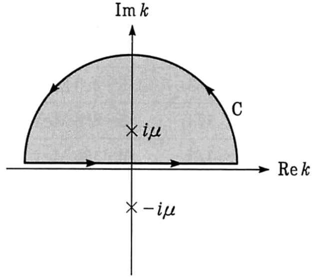
$$\iiint d\boldsymbol{k}\,(|\,\boldsymbol{k}\,|^2 + \mu^2)\,\tilde{V}(\boldsymbol{k})\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\iiint e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{k}$$

となるので，

$$\tilde{V}(k) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+\mu^2} \tag{B.4}$$

が導かれる．(B.4) を (B.1) に代入すると

$$V(r) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\iiint d\boldsymbol{k}\,\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2+\mu^2}$$



$$= -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^\infty k^2\, dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta_k)\, \frac{\exp(ikr\cos\theta_k)}{k^2+\mu^2}$$

$$= -\frac{g^2}{(2\pi)^2 ir}\int_0^\infty \frac{k}{k^2+\mu^2}(e^{ikr}-e^{-ikr})\,dk$$

$$= -\frac{g^2}{(2\pi)^2 ir}\int_{-\infty}^\infty \frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2}\,dk \tag{B.5}$$

と変形される．$e^{ikr} = \exp[-r(\mathrm{Im}\,k)]\exp[ir(\mathrm{Re}\,k)]$ なので，被積分関数は $\mathrm{Im}\,k\to\infty$ で0になる．したがって，積分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ は図に示す閉曲線Cに沿っての積分 $\int_{\mathrm{C}}$ に等しい．閉曲線の内部にある被積分関数の極は $k = i\mu$ だけである．複素積分のコーシーの定理を使うと

$$V(r) = -\frac{g^2}{(2\pi)^2 ir}\frac{2\pi i\cdot i\mu}{i\mu+i\mu}\exp[i(i\mu)r] = -\frac{g^2\exp(-\mu r)}{4\pi r}$$

となる．これが湯川ポテンシャル（5.13）である．

付録C　電磁気力がある場合の解析力学

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の中の電荷 q，質量 m の荷電粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{C.1}$$

である．運動方程式を変分原理から導く解析力学では，電場と磁場をスカラーポ

テンシャルとベクトルポテンシャルで表さないと（C.1）を導けない．

荷電粒子に関係する部分のラグランジアン L を

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) - q\phi \qquad \text{(C.2)}$$

と選び，

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \qquad \text{(C.3)}$$

に注意すると，荷電粒子のラグランジュの運動方程式は以下で示すように，（C.1）になる．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \\
&\qquad = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} - q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + q\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&\qquad = m\ddot{x} - q\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] \\
&\qquad = m\ddot{x} - qE_x - q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]_x \qquad \text{(C.4)}$$

正準座標 x，y，z に共役な正準運動量は

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = qA_x + m\dot{x}, \qquad p_y = qA_y + m\dot{y}, \qquad p_z = qA_z + m\dot{z} \qquad \text{(C.5)}$$

となるので，（C.2）に対応するハミルトニアンは次のようになる．

$$\begin{aligned}
H &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L \\
&= \frac{1}{m}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) - \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 - \frac{q}{m}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) + q\phi \\
&= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi
\end{aligned}$$

なお，電子は固有磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつので，ハミルトニアンに

$$-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$$

という項を追加する必要がある（磁場が一様な場合）．

付録 D　ゲージ変換とゲージ理論

D.1　電磁気学のゲージ変換

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が与えられたときに，関係

$$\text{電場 } \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \text{磁場 } \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{D.1}$$

を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ は無数に存在する．もし，電磁ポテンシャル (A_x, A_y, A_z, ϕ) が (D.1) の解であれば，

$$\left.\begin{aligned} A^{\Lambda}{}_x = A_x - \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad A^{\Lambda}{}_y = A_y - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad A^{\Lambda}{}_z = A_z - \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \\ \phi^{\Lambda} = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{D.2}$$

で定義される $(A^{\Lambda}{}_x, A^{\Lambda}{}_y, A^{\Lambda}{}_z, \phi^{\Lambda})$ も (D.1) の解である．ここで Λ は時空座標 x, y, z, t の任意関数 $\Lambda(x, y, z, t)$ である．この変換を**ゲージ変換**という．電磁気学の基本法則であるマクスウェル方程式は電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ に対する方程式なので，電磁気学はゲージ変換で不変である．

D.2　量子電磁気学のゲージ変換

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{D.3}$$

なので，運動方程式に ϕ も $\boldsymbol{A}$ も現れない古典物理学では，ゲージ変換による不定性は荷電粒子に影響を与えない．

これに対して，電磁場中の荷電粒子（電荷 q）に対するディラック方程式

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\left(i\nabla + \frac{q\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\psi + \gamma^0\left(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{q}{\hbar c}\phi\right)\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \tag{D.4}$$

は，ゲージ変換 (D.2) によって変化する．しかし，荷電粒子の場 ψ の位相が，

$$\psi^{\Lambda} = e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \tag{D.5}$$

というように，電荷 q と（D.2）に現れる関数 $\Lambda(x, y, z, t)$ の積に比例する変化をすれば，ディラック方程式は

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\left(i\nabla + \frac{q\boldsymbol{A}^{\Lambda}}{\hbar}\right)\psi^{\Lambda} + \gamma^0\left(i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{q}{\hbar c}\phi^{\Lambda}\right)\psi^{\Lambda} - \frac{mc}{\hbar}\psi^{\Lambda} = 0 \tag{D.6}$$

となり，（D.4）と同じ形になる．そこで量子電磁気学では，変換（D.2）と（D.5）を合わせて**ゲージ変換**とよぶ．

電磁場中の荷電粒子に対するディラック方程式はゲージ変換で不変である．

電磁場の中の荷電粒子に対するディラック方程式 (D.4) は，ディラック方程式 (6.12)′ の微分演算子 $\partial/\partial x^{\mu}$ を

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i\frac{q}{\hbar}A_{\mu} \qquad \left[A_{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z\right)\right] \tag{D.7}$$

で置き換えて得られる式であることがわかる．(D.7) を**共変微分**という．

古典力学では荷電粒子が $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ の領域を運動しても磁場 $\boldsymbol{B}$ の影響は受けないが，量子力学では $\boldsymbol{A}$ を通じて近傍領域の磁場 $\boldsymbol{B}$ の影響を受ける．

D.3 荷電粒子の場の位相変換

荷電粒子の場のゲージ変換（D.5）の意味を調べるために，荷電粒子の場が全時空点で同じ位相の変化

$$\psi \;\rightarrow\; e^{-iq\lambda}\psi \qquad (\lambda\text{ は定数}) \tag{D.8}$$

を行う場合を考える．つまり，ゲージ変換（D.5）に現れる関数 $\Lambda(x, y, z, t)$ が定数 λ の場合を考える．

ここで，各時空点 x^{μ} にその点での場 $\psi(x^{\mu})$ の位相を表すガウス平面（複素平面）を導入する（図 D.1(a)）．この平面は現実の空間とは異なるので，**内部空間**という．図 (b) に示すように，位相変換（D.8）は，場の位相を測るガウス平面の基準ベクトルの向きが全時空点でいっせいに $q\lambda$ だけ変化することに対応する．

さて，素粒子 A を消滅させる演算子を ψ_{A}，素粒子 B を消滅させる演算子を ψ_{B},

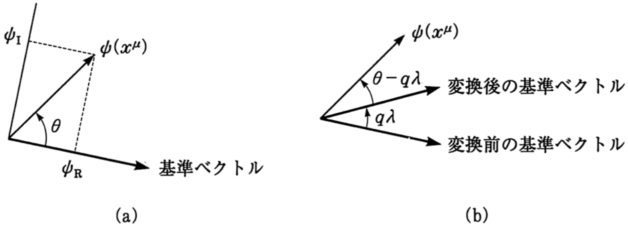


図 D.1　(a)　時空点 x^μ での内部空間
$\psi(x^\mu) = \psi_R(x^\mu) + i\,\psi_I(x^\mu) = |\psi|\,e^{i\theta}$
(b)　基準ベクトルの向きの変化と場の位相 θ の変化

素粒子 C を生成させる演算子を $\psi_C{}^\dagger$，素粒子 D を生成させる演算子を $\psi_D{}^\dagger$ とすると，素粒子反応 A + B → C + D は

$$\psi_D{}^\dagger \psi_C{}^\dagger \psi_B \psi_A \tag{D.9}$$

という演算子の積で引き起こされる．ここで微分，ガンマ行列，定数などは無視した．

電荷の保存

$$q_A + q_B = q_C + q_D$$

のために，電荷に比例する位相変換

$$\left.\begin{aligned} \psi_A &\to e^{-iq_A\lambda}\psi_A, &\quad \psi_B &\to e^{-iq_B\lambda}\psi_B \\ \psi_C{}^\dagger &\to \psi_C{}^\dagger\, e^{iq_C\lambda}, &\quad \psi_D{}^\dagger &\to \psi_D{}^\dagger\, e^{iq_D\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{D.10}$$

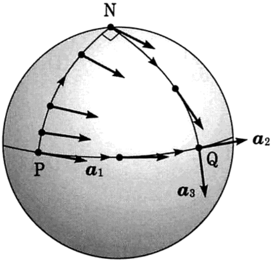
に対して，演算子の積（D.9）は不変である．

$$\begin{aligned} \psi_D{}^\dagger \psi_C{}^\dagger \psi_B \psi_A &\to \exp[-i(q_A + q_B - q_C - q_D)\lambda]\,\psi_D{}^\dagger \psi_C{}^\dagger \psi_B \psi_A \\ &= \psi_D{}^\dagger \psi_C{}^\dagger \psi_B \psi_A \end{aligned} \tag{D.11}$$

全時空点でガウス平面の基準ベクトルの向きを $q\lambda$ だけ変化させても，電荷保存則のために，観測にかかる効果が現れない事実を，理論は**グローバルな対称性**（大域的対称性）をもつという．これに対して，ガウス平面の基準ベクトルの向きを時空点ごとに異なる大きさ $q\Lambda(x^\mu)$ だけ変化させたとき，その効果が観測されなければ，理論には**ローカルな対称性**（局所的対称性）があるという．

D.4　4元電磁ポテンシャルの幾何学的な意味

内部空間の基準ベクトルの向きはわかりにくいので，まず図D.2に示す球面（地球の表面）上の基準ベクトルを考えよう．球面上の1点で基準ベクトルの向きを決めると，このベクトルを平行移動することによって，球面上のほかのすべての点での基準ベクトルの向きを決められるだろうか．答えは「ノー」である．たとえば，赤道上の点Pの真東を向いている基準ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を赤道上の90°だけ東の点Qまで平行移動すると，真東を向いているベクトル $\boldsymbol{a}_2$ になる．ところが，$\boldsymbol{a}_1$ を点Pから子午線上を北極Nまで平行移動し，続いて別の子午線上を赤道上の点Qまで平行移動すると，真南を向いている $\boldsymbol{a}_3$ になる．つまり，球面上には向きの絶対基準が存在しない．存在しない理由は，球面の曲率である．球面の曲率がわかれば，基準ベクトルの移動にともなう向きの変化を計算で求められる．



図D.2　曲がっている表面上で基準ベクトルを平行移動すると，通った道筋で結果は異なる．すなわち，曲面上では面上のすべての点に共通な向きの基準は存在しない．

場 $\psi(x^\mu)$ の位相を表すガウス平面の基準ベクトルについても全時空点に共通な向きの絶対基準は存在せず，各時空点ごとに基準ベクトルの向きを決めなければならない．ただし，この場合に，無限に近くの2つの時空点の基準ベクトルの向きは十分に滑らかにつながるように選ぶ．

電荷 q の粒子の時空点 x^μ での内部空間の基準ベクトル $\boldsymbol{a}$ を最短距離を通って無限に近くの時空点 $x^\mu + dx^\mu$ に平行移動したベクトル $\boldsymbol{a}'$ と時空点 $x^\mu + dx^\mu$ での内部空間の基準ベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角を $q\,d\phi$ とする（図D.3）．角 $q\,d\phi$ は変位 dx^μ に比例すると考えられるので，

$$q\,d\phi = \frac{q}{\hbar}\sum_{\mu=0}^{3} A_\mu(x^\mu)\,dx^\mu \tag{D.12}$$

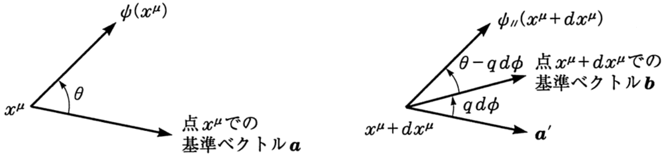


図 D.3　時空点 x^μ での基準ベクトル $\boldsymbol{a}$ と場 $\psi(x^\mu)$ を，時空点 $x^\mu + dx^\mu$ まで最短距離を通って平行移動したものを $\boldsymbol{a}'$ と $\psi_{//}(x^\mu + dx^\mu)$ とすると，$\psi_{//}(x^\mu + dx^\mu) = \psi(x^\mu)\ e^{-iq\,d\phi}$.

とおく．ここで導入した $A_\mu(x^\mu)$ は微分幾何学では接続係数とよばれているが，物理学では一般に**ゲージ場**とよぶ．量子電磁気学の場合，ゲージ場 $A_\mu(x^\mu)$ は 4 元電磁ポテンシャル $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$ であることが以下でわかる．

基準ベクトルの向きを，各時空点 x^μ で任意の大きさ $(q/\hbar)\Lambda(x^\mu)$ だけ変えると，このとき $q\,d\phi$ は

$$\frac{q}{\hbar}\Lambda(x^\mu + dx^\mu) - \frac{q}{\hbar}\Lambda(x^\mu) = \frac{q}{\hbar}\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu}dx^\mu \tag{D.13}$$

だけ増加するので，ゲージ場は，

$$A_\mu(x^\mu) \quad \rightarrow \quad A_\mu(x^\mu) + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} \tag{D.14}$$

に変化する．これはゲージ変換 (D.2) と同じ変換である．

このように，電荷にともなう内部空間の基準ベクトルの向きの任意性を打ち消す試みの中から，電磁相互作用を仲立ちする 4 元電磁ポテンシャルがゲージ場として自然に導入された．

図 D.4 のように，静磁場中の点 A から閉曲線 C に沿って一周するときの内部空

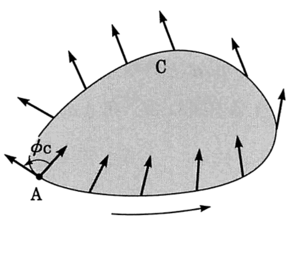


図 D.4　点 A での内部空間の基準ベクトルを閉曲線 C に沿って平行移動して出発点まで移すと，最初の基準ベクトルと一致しない．

間の基準ベクトルの向きの変化 $\phi_{\rm C}$ は，(D.12) の $d\phi$ を閉曲線に沿って加え合わせた

$$\phi_{\rm C} = -\frac{q}{\hbar}\oint_{\rm C} A_t\, ds$$

$$= -\frac{q}{\hbar}\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A})_n\, dA = -\frac{q}{\hbar}\iint_S B_n\, dA$$

$$= -\frac{q}{\hbar}\Phi_{\rm B} \tag{D.15}$$

なので，閉曲線 C を貫く磁束 $\Phi_{\rm B}$ に比例する（ここで，$A_\mu dx^\mu = -A_t ds$ を使った）．したがって，電荷 $-e$ の電子が磁場中の閉曲線に沿って一周するときの波動関数の位相の変化は磁場がないときに比べると，$-(e/\hbar)\Phi_{\rm B}$ だけ増加する．この位相の変化は**アハラノフ－ボーム効果**とよばれており，実験で確かめられている．

電場，磁場がある場合の内部空間は平面ではなく，電場，磁場は曲がった内部空間の曲率であることがわかった．

D.5　ゲージ原理とゲージ理論

「物理法則は，各時空点における内部空間の座標系の任意の変換，つまり，ゲージ変換，に対して不変である」という原理を**ゲージ原理**といい，ゲージ原理に基づいた理論を**ゲージ理論**という．

場の方程式には時間微分と空間微分が現れるが，これらの微分には 2 つの異なった時空点 $x^\mu + dx^\mu$ と x^μ での場 $\psi(x^\mu + dx^\mu)$ と $\psi(x^\mu)$ が出てくる．したがって，2 点での基準ベクトルの向きの任意性が微分の値に影響をおよぼす．そこで，時空点 x^μ での場 $\psi(x^\mu)$ を時空点 $x^\mu + dx^\mu$ まで平行移動して，時空点 $x^\mu + dx^\mu$ での基準ベクトルを使って表したものを $\psi_{/\!/}(x^\mu + dx^\mu)$ と記すと，

$$\psi_{/\!/}(x^\mu + dx^\mu) = |\psi(x^\mu)|\, e^{i(\theta - q\, d\phi)} = \psi(x^\mu)\ e^{-iq\, d\phi} \tag{D.16}$$

と表せる（図 D.3）．したがって，場 $\psi(x^\mu)$ の 4 次元時空間での変化率として，ゲージ理論では

$$\psi(x^\mu + dx^\mu) - \psi_{/\!/}(x^\mu + dx^\mu) = \psi(x^\mu + dx^\mu) - \psi(x^\mu) + iq\, d\phi\, \psi(x^\mu)$$

を dx^μ で割った

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_\mu(x^\mu)\,\psi(x^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_\mu\right)\psi \qquad \text{(D.17)}$$

つまり，場 $\psi(x^\mu)$ の共変微分を使わなければならない．このように，ゲージ理論ではゲージ場と基本粒子の相互作用はゲージ原理から自然に導かれる．

これまでは基本粒子の種類が相互作用で変化しない場合を考えたので，内部空間は複素平面であった．このような理論を $U(1)$ ゲージ理論という．電磁相互作用（ゲージボソンは光子）と弱い超電荷による相互作用（ゲージボソンは B^0 ボソン）の理論は $U(1)$ ゲージ理論である．これに対して，$e \leftrightarrow \nu_e$ のような 2 種類のフレーバーの間の変化をともなう弱いアイソスピンの理論（ゲージボソンは W^+, W^0, W^-）や R，G，B という 3 種類のカラー荷電がある QCD（ゲージボソンはグルオン）の内部空間は複雑である．弱いアイソスピンのゲージ理論は $SU(2)$ ゲージ理論，QCD は $SU(3)$ ゲージ理論とよばれるタイプのゲージ理論である．

演習問題略解

第 2 章

[**1**] 位相速度は波の位相が同じ点 [$(px - Et)/\hbar =$ 一定の点] を連ねたときにできる面の移動速度なので，$E/p = p/2m = v/2$．波がエネルギーを伝える速さの群速度は $dE/dp = p/m = v$．

[**2**] （1） 固有値が $\hbar^2/4$ の固有状態は $\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$，$(\alpha^{(1)}\beta^{(2)} + \beta^{(1)}\alpha^{(2)})/\sqrt{2}$，$\beta^{(1)}\beta^{(2)}$．固有値が $-3\hbar^2/4$ の固有状態は $(\alpha^{(1)}\beta^{(2)} - \beta^{(1)}\alpha^{(2)})/\sqrt{2}$．

（2） 固有値が $\hbar^2/4$ の場合には，スピン変数を入れ換えると，スピン関数は変らないので，波動関数で変数 (x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) を入れ換えると符号が変る．固有値が $-3\hbar^2/4$ の波動関数は，空間座標の入れ換えで不変である．

第 3 章

[**1**] （1） 反応の場合，反応点に奇数本の飛跡が集まる（標的の陽子は静止しているので飛跡を残さない）．崩壊の場合，崩壊点に偶数本の飛跡が集まる．

（2） 略．

[**2**] 標的に入射後の移動距離が x と $x + dx$ の間で失われる粒子数は

$$N(x) - N(x + dx) = -\frac{dN}{dx}dx = \sigma_t n N(x) = \sigma_t n\, N(0)\, e^{-\sigma_t nx}$$

となるので，移動距離 x の期待値である平均自由行程 l は

$$\therefore \quad l = \frac{1}{N(0)}\int_0^\infty x\sigma_t n\, N(0)\, e^{-\sigma_t nx}\,dx = \frac{1}{\sigma_t n}$$

[**3**] $n = 0.071 \times 6.0 \times 10^{23} = 0.43 \times 10^{23}\,\mathrm{cm^{-3}} = 4.3 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$．
$l = 1/n\sigma = 1/(4.3 \times 10^{28} \times 4 \times 10^{-30}) = 6\,\mathrm{m}$．

[**4**] 粒子 B の 1 バンチの中の n_2 個の粒子が粒子 A の進路を妨げる確率は $n_2\sigma/S$ である．これに粒子 A の 1 バンチの中の粒子数 n_1 と 2 つのバンチの遭遇回数 f を掛けたものが，単位時間当りの衝突回数 $R = fn_1n_2\sigma/S$．$\therefore \quad L = R/\sigma = fn_1n_2/S$．

第 4 章

［1］(4.3) から dx', dy', dz', dt' を計算すると

$$dx' = \frac{dx - u\,dt}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \qquad dy' = dy, \qquad dz' = dz, \qquad dt' = \frac{dt - \dfrac{u\,dx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

となり，次の関係が得られる．

$$v_x{}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \qquad v_y{}' = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} v_y, \qquad v_z{}' = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} v_z$$

［2］［1］で得られた速度の合成則の右辺に光速度 c を入れると，

$$\begin{aligned} c'^2 &= c_x{}'^2 + c_y{}'^2 + c_z{}'^2 \\ &= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{uc_x}{c^2}\right)^2}\left[(c_x - u)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(c_y{}^2 + c_z{}^2)\right] \\ &= \frac{1}{c^2\left(1 - \dfrac{uc_x}{c^2}\right)^2}[(c_x - u)^2 c^2 + (c^2 - u^2)(c^2 - c_x{}^2)] \\ &= c^2 \end{aligned}$$

ゆえに $c' = c$.

［3］

$$\begin{aligned} dE = dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot d\boldsymbol{s} &= d\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot \boldsymbol{v} \\ &= \frac{m(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{m\dfrac{v^2}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v})}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{m(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v})}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right) \end{aligned}$$

から $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を得る（$d\boldsymbol{s}/dt = \boldsymbol{v}$ を使った）.

［4］$p \gg mc$ なので $E \fallingdotseq pc$. $W^2 \fallingdotseq (E_+ + E_-)^2 - (E_+ - E_-)^2 = 4E_+E_- = 4 \times 8 \times 3.5 = 112(\mathrm{GeV})^2$. $\therefore$ $W = 10.58\,\mathrm{GeV}$. $\Upsilon(4S)$ の質量は 10.58 GeV/c^2 である．

［5］反応式の右辺の重心系での最小のエネルギー Mc^2 は，陽子の静止エネルギーの 4 倍で $4m_\mathrm{p}c^2$. (4.19) で $M = 4m_\mathrm{p}c^2$, $m = m_\mathrm{p}$ とおくと，$E_\mathrm{L} = 7m_\mathrm{p}c^2$.

このうち $m_\mathrm{p}c^2$ は静止エネルギーなので，加速によって最小でも $6m_\mathrm{p}c^2$ のエネルギーを与えなければならない．

［6］ $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial t}{\partial t'}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial x}{\partial t'}\dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{u}{c}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{c}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

((4.3) を逆に解いた式を使った)．ゆえに，$[(1/c)\partial/\partial t, -\nabla]$ は $(ct, \boldsymbol{r})$ と同じように変換する反変ベクトルである．なお，$[(1/c)\partial/\partial t, \nabla]$ は共変ベクトルである．

第 5 章

［1］ $e^2/4\pi\varepsilon_0 : G_\mathrm{N}m_\mathrm{p}{}^2 = 9.0\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2 : 6.67\times10^{-11}\times(1.67\times10^{-27})^2 = 2.3\times10^{-28} : 1.86\times10^{-64} = 1.2\times10^{36} : 1$

［2］ 略．

［3］ $135\,\mathrm{MeV}/2 = 68\,\mathrm{MeV}$

［4］ スピンが同じ向きの場合の波動関数のスピンの部分は，$\alpha\alpha$，$(\alpha\beta+\beta\alpha)/\sqrt{2}$，$\beta\beta$ のように 2 個の核子の入れ換えで対称である．基底状態は $L=0$ の状態なので，波動関数の空間座標の部分も入れ換えで対称であり，2 陽子と 2 中性子の場合は，パウリ原理によって，スピンが核力の強い同方向を向けないから．

［5］ スピンの α，β に対応するアイソスピンの状態を p，n と表すと，$I=1$ の固有状態は pp，$(pn-np)/\sqrt{2}$，nn，$I=0$ の固有状態は $(pn-np)/\sqrt{2}$．

［6］ 第 3 章の演習問題［2］の解答を参考にせよ．

第 6 章

［1］ ディラック方程式 (6.12) のエルミート共役をとり，

$$-\sum_{\mu=0}^{3} i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^\mu}(\gamma^\mu)^\dagger = \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger$$

右から γ^0 を掛けて，$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ は反エルミートで γ^0 と反交換，γ^0 はエルミート

であることを使い，$\psi^\dagger\gamma^0 \equiv \bar{\psi}$ と記すと，次のようになる．

$$-\sum_{\mu=0}^{3} i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu = \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}$$

［**2**］ $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(-ce\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = -ce\sum_{\mu=0}^{3}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu\right)\psi - ce\sum_{\mu=0}^{3}\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right)$

の最後の辺に（6.12）と（6.19）を代入すると 0 になる．

［**3**］ $\displaystyle\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{8.988\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\times(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})\times(2.998\times10^8\,\mathrm{m/s})/2\pi} = \frac{1}{137.0}$

［**4**］ 粒子 A が 0 でない量子数（バリオン数，レプトン数，ストレンジネスなど）をもつ場合．磁気モーメントをもつ場合には $\mu_{\mathrm{A}} = -\mu_{\bar{\mathrm{A}}}$ なので磁気モーメントでも区別できる．

［**5**］ ポジトロニウムは重心系では $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$，$E \approx 2m_{\mathrm{e}}c^2$．光子は質量が 0 なので，$pc = E$．したがって，エネルギーと運動量の保存則で $\mathrm{e^+ + e^-} \to \gamma$ 反応は禁止される．

［**6**］ 方程式の複素共役をとり，$t \to -t$，$\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$ とおくと

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - a\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi^*(\boldsymbol{r}, -t) = i\hbar\frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)}{\partial t}$$

となる．$\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{B} = \sigma_1B_1 - \sigma_2B_2 + \sigma_3B_3$ なので，$\sigma_2(\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\sigma_2$ であることを使えば，$\sigma_2\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)$ は時間反転した解であることがわかる．

［**7**］ 電磁場のあるときのディラック方程式は

$$\sum_{\mu=0}^{3} i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi, \qquad -\sum_{\mu=0}^{3} i\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu = \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}$$

第 2 の方程式の転置行列をとり，$-(\gamma^\mu)^T = C^{-1}\gamma^\mu C$ を使い，左から C を掛けると，第 1 式で $e \to -e$，$\psi \to C\bar{\psi}^T$ とおいたものになる．

［**8**］ 略．

［**9**］ ポテンシャルの $e^{-\mu r}$ という因子を無視し，短距離での反発力を無視した．

［**10**］ （6.38）の左辺の第 1，2 項は，共変ベクトルである 4 次元時空間の微分

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

と共変なベクトルポテンシャル $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$ の $-i(e/\hbar)$ 倍の和と反変ベクトルである γ^μ のローレンツ不変な内積 $\times\,\psi$，$\displaystyle\sum_{\mu=0}^{3} i\gamma^\mu\{\partial/\partial x^\mu - i(e/\hbar)A_\mu\}\psi$ である．

第 7 章

［**1**］ 原子核 N_1（質量 m_1）は静止しているので，原子核 N_2（質量 m_2）と電子（質量 m_e）の運動量の大きさは等しい．これを p とおくと，エネルギー保存則は

$$m_1c^2 = \sqrt{(m_2c^2)^2 + (pc)^2} + \sqrt{(m_ec^2)^2 + (pc)^2}$$

となる．これを $m_1c^2 - E_e = \sqrt{(m_2c^2)^2 + p^2}$ と変形して両辺の 2 乗をとると，

$$E_e = \sqrt{(m_ec^2)^2 + (pc)^2} = \frac{(m_1c^2)^2 + (m_ec^2)^2 - (m_2c^2)^2}{2m_1c^2}$$

$$K = E_e - m_ec^2 = \frac{(m_1c^2 - m_ec^2)^2 - (m_2c^2)^2}{2m_1c^2}$$

$$= \frac{(m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2)(m_1c^2 + m_2c^2 - m_ec^2)}{2m_1c^2}$$

$m_1c^2 + m_2c^2 - m_ec^2 \fallingdotseq 2m_1c^2$ なので，$K \fallingdotseq m_1c^2 - m_2c^2 - m_ec^2$.

［**2**］ $[\bar{\psi}_e\psi_\nu][\bar{\psi}_p\psi_n]$ のエルミート共役（hc）は $[\bar{\psi}_\nu\psi_e][\bar{\psi}_n\psi_p]$ で，$p^+ \to n^0 + e^+ + \nu$ 反応を引き起こす．$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$ の粒子と反粒子を入れ換えた $\bar{n}^0 \to \bar{p}^- + e^+ + \nu$ 反応も引き起こす．

［**3**］

$$\iiint d\boldsymbol{r}\, G_F\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = G_F$$

$$\iiint d\boldsymbol{r}\, \frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_Wcr/\hbar} = \int_0^\infty r^2\, dr \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_Wcr/\hbar}$$

$$= g^2 \int_0^\infty re^{-m_Wcr/\hbar}\, dr = \frac{g^2}{\left(\dfrac{m_Wc}{\hbar}\right)^2}$$

$$\therefore \quad G_F = \frac{g^2}{\left(\dfrac{m_Wc}{\hbar}\right)^2}$$

［**4**］ スピン 0 粒子 A，B のパリティを P_A，P_B，相対軌道量子数を L とすると，2 粒子系のパリティ $P = P_AP_B(-1)^L$．$\pi^+ + \pi^0$ の場合，パイ中間子のパリティは奇（$P_A = P_B = -1$）で，L はケイ中間子のスピンに等しく $L = 0$ なので，$P = 1$(偶).

$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ 系のパリティは 3 個のパイ中間子のパリティ（-1）の積なので，$P = -1$(奇).

［**5**］ $[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_\nu]^\dagger = [\psi_\nu{}^\dagger(1-\gamma^5)(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi_e] = [\psi_\nu{}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_e] = [\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_e]$．［$(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu$（第 6 章の演習問題［1］参照）と $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$，$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ を使った.］

［**6**］（a） 起こる．（b） 起こらない（電子数 N_e が保存しない）．（c） 起こ

らない（電子数 N_e，ミュー粒子数 N_μ が保存しない）．

第 8 章

［1］　$K^- + p^+ \to \overline{K}^0 + n^0$ は許されるが，ほかの3つの反応はストレンジネスの保存則を破るので許されない．

［2］　（1）　$\pi^- + p^+ \;\to\; K^- + K^0 + p^+,\quad K^- + K^+ + n^0$

（2）　$\pi^- + p^+ \;\to\; K^+ + \Sigma^-$

［3］　$S = -1$ のバリオンは存在するが，$S = 1$ のバリオンは存在しないため．

［4］　（1）　2個のハドロンから構成された $S = -3$ の系は，$K^- + \Xi^0$，$\overline{K}^0 + \Xi^-$ であるが，$m(K) + m(\Xi) > m(\Omega)$ なので，$\Omega^- \nrightarrow K^- + \Xi^0,\ \nrightarrow \overline{K}^0 + \Xi^-$．

（2）　$K^- + p^+ \;\to\; K^+ + K^0 + \Omega^-,\quad \Omega^- \;\to\; \pi^- + \Xi^0,\quad \Xi^0 \;\to\; \Lambda^0 + \pi^0,\quad \Lambda^0 \;\to\; p^+ + \pi^-,\quad \pi^0 \;\to\; 2\gamma$

［5］　6種類のものからくり返しを許して3個選び出す場合の数は56．スピン1/2粒子は2成分，スピン3/2粒子は4成分をもつので，成分数の合計は $8 \times 2 + 10 \times 4 = 56$．

［6］　スピン1/2の2成分を α，β と表すように，アイソスピン1/2の2成分をu，dと表すと，$I = 1$ 状態は uu，$(\mathrm{ud} + \mathrm{du})/\sqrt{2}$，dd で，$I = 0$ 状態は $(\mathrm{ud} - \mathrm{du})/\sqrt{2}$．したがって，波動関数のアイソスピンとスピンの部分の完全対称性から，$I = 0$ のラムダ粒子の場合は $(\mathrm{ud} - \mathrm{du})(\alpha\beta - \beta\alpha)/2$，$I = 1$ の中性シグマ粒子の場合は $(\mathrm{ud} + \mathrm{du})(\alpha\beta + \beta\alpha)/2$．$(\alpha\beta - \beta\alpha)/\sqrt{2}$ はスピン1重項（逆向き），$(\alpha\beta + \beta\alpha)/\sqrt{2}$ はスピン3重項（同じ向き）の波動関数である．なお，sクォークは $I = 0$ であることを使った．

［7］　ν_e を入射するときに電子が出てくる反応は $\nu_e + d \to e^- + u$．陽子（uud）はdクォークを1個，中性子（udd）はdクォークを2個含むので，1：2になる．

［8］　磁場が $+z$ 方向を向いている場合を考え，磁気モーメントの z 成分 μ_z を計算すると

$$
\begin{aligned}
\mu_z \cdot \mathrm{p}\left(s_z = \frac{1}{2}\right) = \frac{e\hbar}{6m}\{&-(\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{u}\!\downarrow\mathrm{d}\!\uparrow + \mathrm{u}\!\downarrow\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{d}\!\uparrow + \mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{d}\!\uparrow\mathrm{u}\!\downarrow \\
&+ \mathrm{u}\!\downarrow\mathrm{d}\!\uparrow\mathrm{u}\!\uparrow + \mathrm{d}\!\uparrow\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{u}\!\downarrow + \mathrm{d}\!\uparrow\mathrm{u}\!\downarrow\mathrm{u}\!\uparrow) \\
&- 10(\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{d}\!\downarrow + \mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{d}\!\downarrow\mathrm{u}\!\uparrow + \mathrm{d}\!\downarrow\mathrm{u}\!\uparrow\mathrm{u}\!\uparrow)\}\frac{1}{\sqrt{18}}
\end{aligned}
$$

となるので，陽子の磁気モーメント μ_p は

$$\mu_p = \frac{e\hbar}{6m} \times \frac{1}{18}\{-1 \times 6 - 10 \times (-2) \times 3\} = \frac{e\hbar}{2m}$$

同様に，中性子の磁気モーメント μ_n は

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{6m} \times \frac{1}{18}\{2 \times 6 + 8 \times (-2) \times 3\} = -\frac{e\hbar}{3m}$$

となる．このようにクォーク模型では $\mu_p/\mu_n = -3/2$ となり，実験値の $\mu_p = 2.79e\hbar/2m_p$，$\mu_n = -1.91e\hbar/2m_p$ の比の値に近い値になるのは，興味ある事実である．

第 9 章

[**1**] K^0，$\overline{K}^0$，π^+，π^- の構成は $d\bar{s}$，$s\bar{d}$，$u\bar{d}$，$d\bar{u}$ であることと，s，$\bar{s}$ は W ボソンの放出で $s \to u + W^-$，$\bar{s} \to \bar{u} + W^+$ と変化することから，

(a)　$\overline{K}^0(s\bar{d}) \;\to\; \pi^+(u\bar{d}) + e^- + \bar{\nu}_e$

(b)　$K^0(d\bar{s}) \;\to\; \pi^-(d\bar{u}) + e^+ + \nu_e$

[**2**] （1） 弱い相互作用を仲立ちする W ボソンは，基本粒子の左巻き成分と基本粒子の反粒子の右巻き成分のみによって放出・吸収されるので，$\overline{U}_{iL}$，$\overline{D}_{jL}$ は W ボソンを放出・吸収できない．

（2） $U_{iL}(\boldsymbol{p}_i) \to D_{jL}(\boldsymbol{p}_j) + W^+(\boldsymbol{p}_W)$ を荷電共役変換すると $\overline{U}_{iL}(\boldsymbol{p}_i) \to \overline{D}_{jL}(\boldsymbol{p}_j) + W^-(\boldsymbol{p}_W)$，さらに空間反転した $\overline{U}_{iR}(-\boldsymbol{p}_i) \to \overline{D}_{jR}(-\boldsymbol{p}_j) + W^-(-\boldsymbol{p}_W)$ を反応面に垂直な直線の周りに 180° 回転すると，$\boldsymbol{p}_i \to -\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{p}_j \to -\boldsymbol{p}_j$，$\boldsymbol{p}_W \to -\boldsymbol{p}_W$ となるので，$\overline{U}_{iR}(\boldsymbol{p}_i) \to \overline{D}_{jR}(\boldsymbol{p}_j) + W^-(\boldsymbol{p}_W)$ になる．

[**3**] 左辺の $(N_e, N_\mu) = (0, \mp 1)$，右辺の $(N_e, N_\mu) = (\mp 1, 0)$ なので，N_e，N_μ が保存せず，この崩壊は起こらない．

[**4**] $m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu$，$E_\mu = \sqrt{(pc)^2 + (m_\mu c^2)^2}$，$E_\nu = \sqrt{(pc)^2 + (m_\nu c^2)^2}$ である．$m_\pi c^2 - E_\mu = E_\nu$ の両辺を 2 乗すると，$m_\pi{}^2 c^4 - 2E_\mu m_\pi c^2 + m_\mu{}^2 c^4 = m_\nu{}^2 c^4$ となる．この式の両辺を c^4 で割ればよい．

索　引

著者略歴

1934年 神奈川県出身．東京大学理学部物理学科卒，同大学院数物系研究科物理学専攻博士課程修了．東京教育大学理学部助手，カリフォルニア工科大学研究員，シカゴ大学研究員，プリンストン高等学術研究所研究員，東京教育大学理学部助教授，筑波大学物理学系教授，同副学長，帝京平成大学情報学部教授を経て，現在 工学院大学CPDセンター客員教授．理博．

主な著書：「素粒子」（朝倉書店），「量子の不思議」（中央公論社），「物理学基礎」，「基礎物理学」（以上 学術図書出版社），「力学と電磁気学」（東京教学社），「量子力学」（岩波書店），「裳華房テキストシリーズ - 物理学　現代物理学」，「裳華房フィジックスライブラリー　電磁気学Ⅰ・Ⅱ」（以上 裳華房）

裳華房テキストシリーズ - 物理学　**素粒子物理学**

2003年7月25日　第1版発行
2008年6月10日　第4版発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

著者　原　康夫
発行者　吉野和浩
発行所　〒102-0081 東京都千代田区四番町8-1
電話　03-3262-9166～9
株式会社 裳華房
印刷所　中央印刷株式会社
製本所　株式会社 青木製本所

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 978-4-7853-2219-9

2008年6月現在

裳華房フィジックスライブラリー

		定価
木下紀正著	大学の物理	2940円
高木隆司著	力学（Ⅰ）・（Ⅱ）	(Ⅰ)2100円 (Ⅱ)1995円
久保謙一著	解析力学	2205円
近桂一郎著	振動・波動	3465円
原康夫著	電磁気学（Ⅰ）・（Ⅱ）	(Ⅰ)2415円 (Ⅱ)2415円
中山恒義著	物理数学（Ⅰ）・（Ⅱ）	(Ⅰ)2415円 (Ⅱ)2415円
香取眞理著	統計力学	近刊
小野寺嘉孝著	演習で学ぶ 量子力学	2415円
坂井典佑著	場の量子論	3045円
塚田捷著	物性物理学	3255円
松下貢著	フラクタルの物理（Ⅰ）・（Ⅱ）	(Ⅰ)2520円 (Ⅱ)2520円
齋藤幸夫著	結晶成長	2520円
梅村雅之著	宇宙物理学	近刊
中川・蛯名・伊藤著	環境物理学	3150円
小山慶太著	物理学史	2625円

裳華房テキストシリーズ－物理学

川村清著	力学	1995円
宮下精二著	解析力学	1890円
小形正男著	振動・波動	2100円
小野嘉之著	熱力学	1890円
兵頭俊夫著	電磁気学	2730円
阿部龍蔵著	エネルギーと電磁場	2520円
原康夫著	現代物理学	2205円
原・岡崎著	工科系のための 現代物理学	2205円
松下貢著	物理数学	3150円
岡部豊著	統計力学	1890円
香取眞理著	非平衡統計力学	2310円
小形正男著	量子力学	3045円
松岡正浩著	量子光学	2940円
窪田・佐々木著	相対性理論	2730円
永江・永宮著	原子核物理学	2730円
原康夫著	素粒子物理学	2940円
鹿児島誠一著	固体物理学	2520円